LETTRE CLV.

=

Euler à Goldbach.

Sommaire. Lettre d'un Officier de la flotte russienne. Lettre de Frédéric II. à Euler. Observations sur les problèmes et théorèmes de la lettre précédente. Théorème de Fermat.

Berlin d. 4. August 1753.

Die verlangten exemplaria von der Lettre d'un Officier de la flotte russienne sind schon vor einigen Posttagen von hier weggeschickt worden, und werden also verhoffentlich schon bey Ew. eingelaufen seyn. Gedachte Schrift ist mir auf ordre des Hn. Hettmanns Hochgräfl. Excellenz zugeschickt worden, um solche hier drucken zu lassen, wovon ich auch die deutsche Uebersetzung besorget. Inzwischen können Ew. versichert seyn, dass ich hievon mit keinem Wort nach St. Petersburg Meldung thun werde, als wohin ich mit Niemand mehr correspondire, als an den Hn. Rath Schumacher, an welchen auch niemals einige Neuigkeit überschreibe. Seit der Abwesenheit unseres Hn. Präsidenten sind

auch meine Geschäfte so angewachsen, dass ich wenig Briefe mehr beantworte, weil ich nicht nur die ganze Administration der Akademie auf dem Halse habe, sondern auch alle Posttage an den Präsidenten rapportire und über alles noch unmittelbar an S. Königl. Majestät Bericht abstatten muss.

Weil ich weiss, dass Ew. auf grosser Herren Briefe aufmerksam sind, so nehme die Freyheit ein Königl. Handschreiben zu communiciren, welches ich erhalten, als ich im Frühjahr einige Pfirsiche aus dem akademischen Garten an S. Königl. Majestät überschickt hatte:

„J'ai bien reçu votre lettre du 24 de ce mois avec les „présens qui l'accompagnoient. Quelque plaisir que la „beauté et la bonté des fruits que Vous M'avez en„voyés M'ait causé, J'en ai encore ressenti davantage „de l'attention que vous avez bien voulu Me témoigner „par-là. Je vous en remercie et Je verrai avec satis„faction les occasions pour vous en marquer Ma recon„noissance. A Potsdam le 26 mai 1753".

Ew. Manier die Formul $1 + 4ef = P^2 + 4Q^2$ zu entwickeln scheinet allerdings weit mehreres in ihrem Umfang einzuschliessen, woraus vielleicht gar eine bündige Demonstration herzuleiten wäre. Ich getraue mir aber kaum, bey meinen gegenwärtigen Zerstreuungen, mich an diese Untersuchung zu wagen. Die Art, um die Zahl $1 + 4ef$ auf diese Form $\frac{ss + eQQ}{\nu\nu}$ zu bringen, in welchen Fällen nehmlich diese Auflösung in ganzen Zahlen nicht geschehen kann, scheint mir auch alle Aufmerksamkeit zu verdienen. Ich habe gesucht dieses etwas generaler zu bewerkstelligen auf folgende Art:

Es sey $1+4ef=\frac{SS+eQQ}{vv}$; weil nun daher

$$vv-SS=eQQ-4efvv=e(QQ-4fvv),$$

so sehe ich, dass $vv-SS$ durch e theilbar seyn muss. Es sey daher $S=ne-v$, so wird $2nev-nnee=e(QQ-4fvv)$ oder $QQ-4fvv+enn-2nv=0$ und mit $4f$ multiplicirt $16ffvv+8nfv+nn=4efnn+4fQQ+nn$, woraus man erhält $n+4fv=\sqrt{((1+4ef)nn+4fQQ)}$. Die ganze Sach kommt also darauf an, dass man in einem jeglichen Fall, da die Zahlen e und f gegeben sind, solche Zahlen für n und Q suche, dass $(1+4ef)nn+4fQQ$ ein Quadrat werde.

Will man sich mit Probiren behelfen, so wird es nicht schwer fallen in jeglichem Fall, wofern nur die Zahlen e und f nicht gar zu gross sind, n und Q zu finden; allein wenn e und f grosse Zahlen sind, so wird man mit dem Probiren schwerlich zurecht kommen. Eine sichere Methode aber scheint mir kaum möglich zu seyn, weil es Fälle gibt, da die Auflösung gar nicht einmal Statt findet, nehmlich wenn $1+4ef$ kein numerus primus ist, und ich sehe nicht ab, wie diese Bedingung in die Methode gebracht werden könnte.

Dass dergleichen problemata sehr schwer werden können, ist aus diesem zu ermessen, wenn eine ganze Zahl x gesucht wird, dass $nxx+1$ ein Quadrat werde, wenn nehmlich n ein numerus integer positivus non quadratus ist. Wenn z. Ex. $61xx+1$ ein Quadrat werden soll, so ist die kleinste ganze Zahl für x, wodurch dieses erhalten wird, $x=226153980$. Wie sollte nun diese erstaunliche Zahl durch Probiren gefunden werden können.

Soll aber $109xx+1$ ein Quadrat werden, so ist die kleinste Zahl $x=15140424455100$ und die Wurzel des daher entstehenden Quadrats $\sqrt{(109xx+1)}=158070671986249$. Diese grossen Zahlen habe ich vermittelst einer gewissen Methode neulich in etlichen Minuten gefunden.

Wie unendlich viel summae duorum quadratorum $aa+bb$ gefunden werden können, welche zugleich in dieser Form $vv+ezz$ enthalten sind, habe ich aus Anlass der mir von Ew. gütigst communicirten gebrochenen Formuln, noch diese in ganzen Zahlen gefunden. Es ist nehmlich

$$(eqq-yy+rr)^2+4rryy=(eqq-yy-rr)^2+e.4qqrr.$$

Noch generaler kann ich auch solche Zahlen geben, welche zugleich in dieser Form $aa+mbb$ und dieser $vv+nzz$ enthalten sind; nehmlich es ist

$$(nyy-mxx+uu)^2+m.4uuxx=$$
$$(nyy-mxx-uu)^2+n.4uuyy.$$

Bey der schönen serie, welche Ew. für $n^{\sqrt{2}}$ gefunden, ist nur schad, dass dieselbe immer divergens wird, so oft n ein numerus >1 ist. Diesem kann aber leicht geholfen werden, wenn man für n setzt $\frac{1}{m}$, da dann m eine fractio unitate minor wird und $n^{\sqrt{2}}=\frac{1}{m^{\sqrt{2}}}$. Doch aber sind die summae serierum $a+b+c+d+$ etc. item $b+2c+3d+4e+$etc. immer infinitae, dass also auch mit dieser Beyhülfe die practische Berechnung nicht erleichtert wird. Zu diesem Ende habe ich dieses Mittel gefunden: Man suche erst diese seriem $\frac{(n-1)}{1(n+1)}+\frac{(n-1)^3}{3(n+1)^3}+\frac{(n-1)^5}{5(n+1)^5}+\frac{(n-1)^7}{7(n+1)^7}+$ etc. $=s$, welche allezeit convergens ist. Hernach setze man $2s\sqrt{2}=h$, so wird

$$n^{\sqrt{2}}=1+\frac{h}{1}+\frac{hh}{1.2}+\frac{h^3}{1.2.3}+\frac{h^4}{1.2.3.4}+\frac{h^5}{1.2.3.4.5}+\text{etc.}$$

Bey Fermat findet sich noch ein sehr schönes theorema, dessen Demonstration er sagt gefunden zu haben. Nehmlich bey Anlass der Diophantaeischen Aufgabe, zwey quadrata zu finden, deren Summ ein Quadrat ist, sagt er, dass es unmöglich sey zwey cubos zu finden, deren Summ ein cubus sey, und zwey biquadrata, deren Summ ein biquadratum, und generaliter, dass diese Formul $a^n + b^n = c^n$ allzeit unmöglich sey, wenn $n > 2$. Ich habe nun wohl Demonstrationen gefunden dass $a^3 + b^3 \neq c^3$ und $a^4 + b^4 \neq c^4$, wo $\neq$ unmöglich gleich bedeutet. Aber die Demonstrationen für diese zwey casus sind so von einander unterschieden, dass ich keine Möglichkeit sehe, daraus eine allgemeine Demonstration für $a^n + b^n \neq c^n$ si $n > 2$ herzuleiten. Doch sieht man quasi per transennam ziemlich deutlich, dass je grösser n ist, je unmöglicher die Formul seyn müsse. Inzwischen habe ich noch nicht einmal beweisen können, dass summa duarum potestatum quintarum keine potestas quinta seyn könne. Dieser Beweis beruhet allem Ansehn nach nur auf einem glücklichen Einfall, und so lang man nicht darauf verfällt, möchte wohl alles Nachsinnen vergebens seyn. Da aber diese Aequation $aa + bb = cc$ möglich ist, so ist auch diese möglich $a^3 + b^3 + c^3 = d^3$, woraus zu folgen scheint, dass auch diese $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = e^4$ möglich ist, doch habe ich bisher noch keinen Fall davon ausfindig machen können. Es können aber fünf biquadrata angegeben werden, deren Summ ein Biquadrat ist.

Euler.

LETTRE CLVI

=

Goldbach à Euler.

Sommaire. Décomposition des nombres premiers en quarrés. Suite.

St. Petersburg d. 26. April 1755.

Wenn ich mich nicht irre, ist mein letztes Schreiben an Ew. vom 28 Junii st. n. 1753 gewesen, und folglich eine geraume Zeit verflossen, darin mir nichts beygefallen, das ich Deroselben zu communiciren werth gehalten hätte, ohngeachtet ich die Proprietät, dass ein numerus primus hujus formae $1 + 4ef$ zu dieser $PP + eQQ$, allwo P et Q rationales sind, gebracht werden kann, öfters consideriret und auf unterschiedene Formen reduciret habe, als z. Ex. wenn $1 + 4ef = RR + 2abeSS$, so kann solcher numerus primus allezeit in $PP + eQQ$ verwandelt werden; oder auch wenn zwey numeri irrationales h et m gefunden werden können, so dass $h - m$ und hm rationales seyen und $h =$

$\frac{\sqrt{(4f-mm)}}{\sqrt{(emm+1)}}$, können gleichfalls die numeri quaesiti P et Q in rationalibus angegeben werden; imgleichen wenn $QQ = 4fvv + 2mv - emm$ gefunden werden kann, so wird $1 + 4ef = \frac{(4fv+m)^2 - 4fQQ}{mm} = \frac{(emm-v)^2 + eQQ}{vv}$, und endlich, weil der numerus primus $1 + 4ef =$ ist duobus quadratis $aa + bb$, quae in quocunque casu determinari possunt, so ist genug, wenn man nur einen numerum rationalem k finden kann hac lege, ut $aa(e+kk) + bb(e-kk)$ fiat quadratus, da es alsdann nicht schwer ist die numeros quaesitos P et Q zu finden, denn es wird

$$aa + bb = \frac{(hh+1)^2 aa}{4hh} + \frac{ekk(hh-1)^2 aa}{hh(e-kk)^2}$$

si sumatur

$$h = \frac{b(e-kk) \pm \sqrt{(aa(e+kk)^2 + bb(e-kk)^2)}}{a(e+kk)}.$$

Ferner ist auch diese Proprietät merkwürdig, ungeachtet ich mich um deren Demonstration nicht bemühet: Si quadratum aliquod divisum per numerum primum p hujus formae $4n+1$, relinquat numerum r, dabitur etiam aliud quadratum, quod divisum per eundem numerum p, det residuum $p - r$.

Imgleichen numerus primus $4n+1$, dividens numeros quadratos quoscunque, tot relinquere potest diversa residua quot $2n$ continet unitates, als z. Ex. wenn $n = 1$, so kann der divisor 5 nur zwey residua nachlassen, nehmlich 1 und 4; wenn $n = 3$, so lässet der divisor 13, dividens quadratos, sex residua, nehmlich 1, 3, 4, 9, 10, 12, et ita reliqui.

Goldbach.

LETTRE CLVII.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Même sujet. Réponse à la précédente.

Berlin d. 17. Mai 1755.

Ew. Betrachtungen über das theorema, dass die Zahl $1 + 4ef$, so oft sie ein numerus primus ist, immer in dieser Form $P^2 + eQ^2$ enthalten sey, habe ich mit dem grössten Vergnügen zu ergründen gesucht und darin sehr wichtige Kunstgriffe wahrgenommen; nur ist es schad, dass dieselben noch so weit von einer vollständigen Demonstration entfernt sind. Doch ist es schon von keinem geringen Nutzen, dass, da man von der Wahrheit des theorematis versichert ist, auch alle die daraus hergeleiteten Formuln gewiss resolvirt werden können, welches sonsten sehr schwer fallen würde. Aus allen Bemühungen, die ich hierüber angewandt, deucht mich so viel sicher schliessen zu können, dass man niemals eine solche Demonstration finden wird, aus welcher zugleich ex dato numero primo $1+4ef$, die quadrata P^2 und Q^2 selbst angegeben werden könnten; sondern man muss sich nur mit einer solchen begnügen, welche die Möglichkeit, dass $1+4ef = P^2 + eQ^2$, beweiset, ohne den modum anzuzeigen, wie diese Resolution wirklich anzustellen. Denn da dieselbe nur alsdann möglich ist, wenn $1+4ef$ ein numerus primus ist, so sehe ich nicht ab, wie man diese nothwendige Bedingung in Betrachtung ziehen könnte. Es ist also eine verlorne Mühe, die numeros P et Q generaliter durch e und f bestimmen zu wollen: denn wenn solches möglich wäre, so müssten auch die Zahlen P und Q gefunden werden können, wenn auch $1+4ef$ kein numerus primus wäre, welches doch gewiss öfters unmöglich ist.

Es ist mir endlich wohl gelungen zu beweisen, dass $1+4f = PP+QQ$, so oft $1+4f$ ein numerus primus ist; allein der Beweis hilft mir im geringsten nichts, um einen solchen numerum primum $1+4f$ würklich in zwey quadrata zu resolviren.

Neulich habe ich auch die Beweise zu Stande gebracht, dass $1+8f = 1+4.2f = PP+2QQ$ und $1+12f = 1+4.3f = PP+3QQ$, so oft nehmlich diese Zahlen $1+8f$ und $1+12f$ numeri primi sind. Doch habe ich bisher noch nicht weiter gehen können.

Ich sehe aber, dass sich diese Formuln noch weiter erstrecken, denn es ist nicht nur $1+8f = PP+2QQ$, sondern auch $3+8f = PP+2QQ$, wenn es numeri primi sind. Hernach ist auch $7+12f = PP+3QQ$. Hernach, wenn $e=5$ genommen wird, so hat man diese theoremata $1+20f = PP+5QQ$, $9+20f = PP+5QQ$, welche ich aber nicht beweisen kann. Vielleicht aber, wenn auch diese

Fälle mit in Betrachtung gezogen werden, findet man etwas eher Mittel, zu einer allgemeinen Demonstration zu gelangen.

Das theorema, dass wenn ein quadratum per numerum primum $p = 1+4n$ getheilt, das residuum r lässt, ein anderes Quadrat das residuum $p-r$ zurücklassen müsse, habe ich schon lang bewiesen. Denn wenn $1+4n$ numerus primus et a numerus datus, so können immer unendlich viel Zahlen $aa+xx$ gefunden werden, qui per $1+4n = p$ sint divisibiles; wenn also aa per p divisum r zurücklässt, so muss xx, $p-r$ zurücklassen.

Ew. ist der Beweis bekannt, dass $a^4 \pm b^4 \neq p^4$. Neulich bin ich auch mit dem Beweis zu Stande gekommen, dass $a^3 \pm b^3 \neq p^3$; weiter kann ich aber auch nicht kommen. Fermat hat aber nicht nur dies bewiesen, sondern auch dass $a^5 \pm b^5 \neq p^5$, $a^7 \pm b^7 \neq p^7$ und generaliter dass $a^n \pm b^n \neq p^n$, exceptis casibus $n=1$ et $n=2$. Allem Ansehn nach kommt es hier auf einen besondern Einfall an, und so lang man nicht darauf kommt, ist alle Arbeit vergebens. Ohne Zweifel wird man darauf sehen müssen, dass a^5+b^5 ausser $a+b$ keine andere divisores primos haben kann, als hujus formae $10m+1$, welches ich bewiesen habe.

Euler.

LETTRE CLVIII.

=

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Même sujet.

St. Petersburg d. 5. August 1755.

Ew. werthestes Schreiben vom 17 Mai habe ich d. 29. ejusd. wohl erhalten und daraus mit vielem Vergnügen ersehen, dass Sie meine Anmerkungen über die Verwandlung des numeri primi $1+4ef$ in $PP+eQQ$ richtig befunden. Sie führen zwar an, dass die von Ihnen demonstrirte Proposition, numerum $1+4f$, si est primus, esse $=PP+QQ$, zu würklicher Determination der numerorum P et Q im Geringsten nichts beyträget, allein ich bin der Meinung, quidquid per certum et determinatum numerum tentaminum inveniri potest, illud pro invento habendum esse, als z. Ex. wenn ein problema ad aequationem quatuor potestatum reduciret wird, wo man per unum, duo, vel tria tentamina die radicem satisfacientem finden muss. Ingleichen halte ich das problema: invenire omnes divisores numeri dati, pro solubili, quia solvi potest per finitum numerum tentaminum etc. In dem casu nun, da Ew. gefunden haben, dass ein jeder numerus primus hujus formae $1+4f=PP+QQ$, sind zugleich die numeri P et Q für gefunden zu achten, quia per numerum finitum tentaminum inveniri possunt, denn ich darf nur P oder Q den numeris integris 1, 2, 3, etc. successive $=$ setzen, und deren quadrata von dem numero primo $1+4f$ so lang subtrahiren, bis das residuum ein quadratum wird, wozu noch viele compendia, ut eligantur numeri idonei, angegeben werden können.

Die demonstrationes zu den casibus $1+8f$ und $1+12f$ möchte ich gern sehen, im Fall sie nicht weitläufig sind und eine sehr grosse Attention erfordern.

Sonst habe ich noch gefunden, dass wenn y durch diese Aequation

$$\frac{(ayy+2by-a)(byy-2ay-b)}{(yy+1)^2}=abeSS$$

und posita S rationali, y rationalis wird, alsdann auch die Aequation Statt hat

$$aa+bb=\frac{((ayy+2by-a)-(byy-2ay-b))^2}{(yy+1)^2}+2abeSS,$$

welcher casus, wie ich schon in meinem letzten Schreiben angemerket, allezeit auf die Form $PP+eQQ$ reducirt werden kann; ja wenn in dieser letzten Formul P oder Q nur unico casu gegeben wird, so kann ich daraus unzählige similes et rationales finden, nehmlich

$$\frac{(ePyy+2eQy-P)^2+e(Q+2Py-eQyy)^2}{(eyy+1)^2},$$

wenn ich vor y einen numerum quemcunque rationalem annehme, als z. Ex. weil $89=\frac{9^2}{2^2}+\frac{11.5^2}{2^2}$, allwo $P=\frac{9}{2}$, $Q=\frac{5}{2}$, $e=11$, so wird posita $y=2$, der numerus primus $89=\frac{607^2+11.179^2}{90^2}$, welches vielleicht noch zu andern Anmerkungen Gelegenheit geben wird.

Goldbach.

LETTRE CLIX.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Même sujet. Développements ultérieurs. Intégration d'équations différentielles analogues à celle de Riccati. Nomination d'Euler à l'Académie de Paris et lettre du comte d'Argenson. Sommation d'une série qui se rencontre dans le tome II de la Mécanique.

Berlin d. 23. August 1755.

Es muss allerdings die reductio numeri primi $1+4f$ ad formam $PP+QQ$ pro possibili gehalten werden, ungeacht keine Regul gegeben werden kann, in jedem Fall die quadrata PP und QQ selbst zu finden, sondern die Sache auf blosses Probiren ankommt. Ich hatte aber dieses nur angeführt um zu zeigen, dass um dieses theorema zu beweisen, quod $1+4f=PP+QQ$, die Demonstration nicht aus der wirklichen Resolution hergeleitet werden könne. Nehmlich dato numero f in genere, halte ich für unmöglich die Zahlen P und Q per f zu bestimmen. Eben so verhält sich auch die Sach mit diesem theoremate, quod $1+8f=2PP+QQ$ (wenn nehmlich $1+8f$ ein numerus primus ist) dessen Demonstration unmöglich so beschaffen seyn kann, dass die valores P und Q würklich durch f ausgedrückt würden. Mein Beweis davon gründet sich auf folgende Sätze:

I. Numerus $2aa + bb$, si non est primus, alios non admittit divisores nisi qui ipsi sint formae $2pp + qq$ (posito scilicet, quod a et b sint numeri inter se primi).

II. Si $1 + 8f$ est primus, forma $a^{8f} - b^{8f}$, quicunque numeri pro a et b accipiantur, semper est divisibilis per $1 + 8f$ (dummodo neuter numerorum a et b sit per $1+8f$ divisibilis). Cum jam sit $a^{8f} - b^{8f} = (a^{4f} - b^{4f})(a^{4f} + b^{4f})$, alteruter factor $a^{4f} - b^{4f}$ vel $a^{4f} + b^{4f}$ per $1 + 8f$ erit divisibilis.

III. At non omnes numeri formae $a^{4f} - b^{4f}$ per $1 + 8f$ sunt divisibiles; nam si singuli hi numeri

$$2^{4f} - 1,\ 3^{4f} - 1,\ 4^{4f} - 1,\ 5^{4f} - 1, \ldots (8f)^{4f} - 1$$

essent divisibiles, eorum quoque differentiae tam per $1 + 8f$ primae quam secundae et sequentes omnes essent etiam per $1 + 8f$ divisibiles: at differentiae ultimae seu constantes sunt $2.3.4.5 \ldots 4f$, quae cum non sit per $1 + 8f$ divisibilis, sequitur etiam non omnes illos numeros per $1 + 8f$ esse divisibiles.

IV. Dantur ergo numeri pro a et b, quibus $a^{4f} - b^{4f}$ non est divisibilis per $1 + 8f$; iis ergo casibus numerus $a^{4f} + b^{4f}$ certe est per $1 + 8f$ divisibilis. At est

$$a^{4f} + b^{4f} = (a^{2f} - b^{2f})^2 + 2a^{2f}b^{2f},$$

ideoque numerus formae $PP + 2QQ$, qui cum sit per $1 + 8f$ divisibilis, necesse est per (I), ut divisor $1 + 8f$ ipse sit numerus ejusdem formae $PP + 2QQ$.

Wenn man einen einigen casum gefunden, quo formula $xx + eyy$ fit aequalis dato numero N, so können daraus infiniti alii in fractis scilicet gefunden werden. Als wenn $aa + ebb = N$, ponatur $x = a + pz$ et $y = b - qz$, fietque $aa + 2apz + ppzz + ebb - 2ebqz + eqqzz = N$; at $aa + ebb = N$, ergo $2apz + ppzz - 2ebqz + eqqzz = 0$, unde fit $z = \frac{2ebq - 2ap}{pp + eqq}$. Ergo sumendo pro p et q numeros quoscunque, erit $x = \frac{eaqq + 2ebpq - app}{pp + eqq}$ et $y = \frac{bpp - ebqq + 2apq}{pp + eqq}$.

Wenn aber e ein numerus negativus, so können aus einem einigen casu $aa - ebb = N$, in integris invento, infiniti alii etiam in integris gefunden werden, welches ich also kürzlich zeige:

Theorema. Si fuerit $aa - ebb = N$, tum infiniti casus in numeris integris x et y assignari possunt, quibus fiat $xx - eyy = N$ (dummodo e non sit numerus quadratus).

Demonstratio. Quicunque sit numerus e, dum non quadratus, semper assignari possunt numeri p et q, ut sit $pp - eqq = 1$ seu $pp = eqq + 1$. Cum jam sit per hypothesin $aa - ebb = N$, erit quoque $(aa - ebb)(pp - eqq) = N$. At est $(aa - ebb)(pp - eqq) =$

$$aapp - ebbpp - eaaqq + eebbqq =$$
$$(ap \pm ebq)^2 - e(bp \pm aq)^2.$$

Capiatur ergo $x = ap \pm ebq$ et $y = bp \pm aq$, erit

$$xx - eyy = N.$$

Jam quemadmodum ex primo casu $x = a$ et $y = b$, hinc duo adeo novi sunt inventi, ex his simili modo porro novi, ex iisque deinceps alii in infinitum elici poterunt. Q. E. D.

Die ganze Sache kommt also darauf an, dass pro quovis numero e die Zahlen p und q angegeben werden, ut sit $pp = eqq + 1$, welches in numeris integris allzeit geschehen kann, wie schon Pell und Fermat gezeiget. Dazu kann beygesetzte Tabelle dienen.

Ut sit $pp = eqq + 1$

si sit	erit	et
$e = 2$	$q = 2$	$p = 3$
$e = 3$	$q = 1$	$p = 2$
$e = 5$	$q = 4$	$p = 9$
$e = 6$	$q = 2$	$p = 5$
$e = 7$	$q = 3$	$p = 8$
$e = 8$	$q = 1$	$p = 3$
$e = 10$	$q = 6$	$p = 19$
$e = 11$	$q = 3$	$p = 10$
$e = 12$	$q = 2$	$p = 7$
$e = 13$	$q = 180$	$p = 694$
etc.		

Diese Tabelle enthält die kleinsten Werthe für p et q, welche durch die sogenannte Pellianische Methode gefunden werden. Diese Methode ist aber ziemlich beschwerlich, wenn die Zahlen für p und q, wie bey dem casu $e = 13$ geschieht, gross werden, und ich habe Mittel gefunden dieselbe sehr abzukürzen. Denn es geschieht in einigen Fällen, dass die kleinsten Zahlen p und q ungeheuer gross werden, als wenn $e = 61$, so ist $q = 226153980$ und $p = 1766319049$; — wenn $e = 109$, so ist $q = 15140424455100$ und

$$p = 158070671986249.$$

Ew. haben vormals auch solche Zahlen $\square + \triangle$ oder $\square + 2\triangle$ in Betrachtung gezogen, und neulich haben mich dieselben auf curieuse theoremata exclusiva geleitet. Als

I. Cum non omnes numeri sint aggregata ex quadrato et trigonali, seu formae $\square + \triangle$, dantur infiniti numeri in hac forma non contenti, ejusmodi numerus si fuerit n, tum numerus $8n + 1$ certe non est primus.

II. Infiniti dantur numeri in forma $\square + 2\triangle$ non contenti. Sit n hujusmodi numerus, et $4n + 1$ certe non erit numerus primus.

Letztens bin ich ungefähr auf dieses problema gefallen:

Invenire aequationem cubicam $x^3 - Axx + Bx - C = 0$, quae habeat omnes suas radices rationales, et in qua coëfficientes A, B, C sint numeri quadrati. Vel si p, q, r sint ejus radices, eas ita comparatas esse oportet, ut primo $p + q + r$, secundo $pq + pr + qr$ et tertio pqr sint numeri quadrati.

Ich halte dieses problema um so viel schwerer, da ich glaube, dass für p, q, r nicht wohl kleinere Zahlen gefunden werden können, als diese: $p = 252782198228$, $q = 1633780814400$, $r = 3474741058973$.

Ich habe neulich wieder einige Untersuchungen über solche Differentialaequationen, dergleichen die Riccatiana ist, angestellt, welche sich nur in gewissen Fällen integriren lassen. Wenn nun für i ein numerus integer quicunque angenommen wird, so sind folgende aequationes immer integrabel:

I. $dy + yydx = aax^{2n-2}dx + ((2i+1)n \pm 1)ax^{n-2}dx.$

II. $dy + yydx = \frac{(in \pm 1)(in + n \pm 1)\, abx^{n-2}\, dx}{(a - bx^n)^2}$, vel haec aequatio $dy + yydx = \frac{mabx^{n-2}dx}{(a - bx^n)^2}$ toties est integrabilis, quoties fuerit $n = \frac{\sqrt{(1 + 4i(i+1)m)} \pm (2i+1)}{2i(i+1)}$. Ita si $i = 2$, $m = 3$ erit $n = \frac{\sqrt{73} + 5}{12}$; unde integrabilis haec aequatio

$$dy + yy\,dx = \frac{3abx^{\frac{\sqrt{73}-19}{12}}\,dx}{\left(a - bx^{\frac{\sqrt{73}+5}{12}}\right)^2}.$$

Porro sit $n = 2$, et $i = 2$, integrabilis erit haec aequatio (ponendo $a = 1$, $b = 1$) $dy + yy\,dx = \frac{15\,dx}{(1-xx)^2}$, est vero integrale $y = \frac{15x + 14x^3 - 2x^5}{(1-xx)(1+6xx+2x^4)}$.

III. $dy + yy\,dx = \frac{in\,(in \pm 1)\,bx^{n-2}\,dx}{a + bx^n}$;

IV. $dy + yy\,dx = \frac{in\,(in \pm 1)\,a\,dx}{xx\,(a + bx^n)}$;

V. Haec aequatio

$$dy + yy\,dx = \frac{\lambda(\lambda-1)\,aa - \mu abx^n + \nu(\nu-1)\,bbx^{2n}}{xx\,(a+bx^n)^2} \cdot dx,$$

semper est integrabilis quoties sumto pro i numero integro quocunque fuerit

$$\mu = i(i+1)\,nn - (2i+1)\,n\,(\lambda - \nu) + \lambda + \nu - 2\lambda\nu.$$

So viel ich weiss, geniesst hier Niemand die Postfreyheit und so lang ich hier bin, hat mich meine Correspondenz jährlich wohl 200 Rthlr. gekostet. Ich gebe aber für keine Briefe das Postgeld mit grösseren Freuden aus, als diejenigen, welche von Ew. zu erhalten die Ehre habe, und wünschte, dass, wofern solches ohne Dero Unbequemlichkeit geschehen könnte, ich dieses Vergnügens öfters theilhaftig werden könnte.

Jüngsthin hat mir die Königl. Pariser Akademie die Ehre gethan mich unter ihre auswärtige Mitglieder aufzunehmen. Der H. Graf v. Argenson hat mir diese Nachricht selbst in einem Schreiben gemeldet, wovon ich die Freyheit nehme Ew. eine Copie beyzulegen. Euler.

Copie de la lettre du Marquis d'Argenson.

A Monsieur Euler, Directeur de la classe des mathématiques de l'Académie de Berlin.

Le Roy vient de vous choisir, Monsieur, d'après le voeu de Son Académie royale des sciences, pour remplir une place d'associé étranger dans cette Académie, et comme elle a nommé en même tems Milord Macclesfield, Président de la Société royale de Londres, pour remplir une pareille place qui vaque par la mort de M. Moivre, Sa Majesté a décidé que la première place de cette espèce, qui vaquera, ne sera pas remplie. L'extrême rareté de ces sortes d'arrangemens est une distinction trop marquée, pour ne pas vous en faire l'observation et vous assûrer de toute la part que j'y prends. L'Académie désiroit vivement de vous voir associé à ses travaux et Sa Majesté n'a pu qu'adopter un témoignage d'estime que vous méritez à si juste titre. Soyez persuadé, Monsieur, qu'on ne peut vous être plus parfaitement dévoué que je le suis.

M[is] D'Argenson.

P. S. In meiner Mechanica Tom. II. pag. 405 kommt diese series vor:

$$1 - \frac{n}{3} + \frac{n(n-2)}{3.5} - \frac{n(n-2)(n-4)}{3.5.7} + \frac{n(n-2)(n-4)(n-6)}{3.5.7.9} - \text{etc.}$$

deren Summ dort gegeben wird $= \frac{1}{n+1}$. Ich kann mich nicht mehr recht erinnern, wie ich damals auf diese Summ gekommen, glaube aber, dass damals mehrmals darüber mit Ew. zu conferiren die Ehre gehabt habe.

LETTRE CLX.

=

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Félicitations à l'occasion de la nomination d'Euler. Prix remporté par son fils. Sommation d'une série. Théorème de nombres.

St. Petersburg d. 9. December 1755.

Ew. gratulire ich zuvörderst zu der erhaltenen Stelle eines Académicien honoraire bey der Parisischen Acad. d. sciences und danke Deroselben für die mir übersandte Copie von dem Briefe des Mr. d'Argenson. Es fehlet aber dabey das Beste, nehmlich Ew. Antwort, welche, wie ich gänzlich glaube, sehr wohl abgefasset und digne de l'approbation des Quarante seyn wird. Ferner gereichet es mir zum grossen Vergnügen, dass Dero ältester Herr Sohn*) das praemium bey der hiesigen Akad. d. Wiss. erhalten hat; ich zweifle im Geringsten nicht, dass solches noch öfters geschehen

*) Jean-Albert Euler, plus tard secrétaire perpétuel de l'Académie de St.-Pétersbourg. Il était le filleul de Goldbach.

werde, wenn er die Mühe nehmen wird seine pièces zu solchem Ende einzusenden.

Vor die mir communicirten merkwürdigen theoremata sage ich schuldigsten Dank, und ob ich gleich wenige Hoffnung habe, dass ich dieselben jemals pro dignitate werde betrachten können, so ist es mir doch sehr lieb, dass Ew. noch immer fortfahren solche schöne découvertes zu machen. Mir ist seit meinem letztern Schreiben nichts sonderliches eingefallen. Was aber die seriem

$$1 - \frac{n}{3} + \frac{n(n-2)}{3.5} - \frac{n(n-2)(n-4)}{3.5.7} + \text{etc.} = \frac{1}{n+1}$$

betrifft, so kann ich mich zwar nicht erinnern selbige schon gesehen zu haben, es ist aber deren summa ganz offenbar. Eine andere Bewandniss hat es mit den seriebus, deren denominatores in certis casibus $= 0$ und folglich die summa seriei infinite magna werden kann.

Goldbach.

P. S. Theorema: Si sit $aa+bb=PP+eQQ$, ubi P et Q rationales, erit etiam

$$aa+((2e+1)b-eP-eQ)^2=MM+eNN,$$

ubi M et N rationales.

LETTRE CLXI.

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Critique du théorème précédent.

Berlin d. 3. Januar 1756.

Ich habe nun schon eine geraume Zeit so viel andere Geschäfte gehabt, dass ich an numerische theoremata, dergleichen ich Ew. das letzte Mal vorzulegen die Ehre gehabt, nicht habe denken können. Die partes matheseos applicatae nehmen mir die meiste Zeit weg, wo es immer mehr zu untersuchen gibt, je mehr man damit umgeht. Weil nun mein Kopf mit so viel andern Sachen angefüllt ist, so mag das wohl die Ursach seyn, dass ich mich in das von Ew. communicirte und nach der Hand verbesserte theorema nicht finden kann. Vielleicht haben Ew. vergessen noch eine wesentliche Condition hinzuzusetzen.

Das theorema war: Si sit $aa+bb=P^2+eQ^2$ erit etiam

$$aa+((2e+1)b-eP-eQ)^2=M^2+eN^2.$$

Weil ich den Grund desselben nicht einsehen konnte, so habe ich die Richtigkeit desselben durch Exempel erforschen wollen.

I. Da $1^2+4^2=17=3^2+2.2^2$, so ist $a=1$, $b=4$, $P=3$, $Q=2$ und $e=2$, also müsste seyn

$$1^2+(5.4-2.3-2.2)^2=1^2+10^2=101=M^2+2N^2,$$

welches unmöglich ist.

II. Da $9^2+4^2=97=7^2+3.4^2$, so ist $a=9$, $b=4$, $P=7$, $Q=4$ und $e=3$, also müsste seyn

$$9^2+(7.4-3.7-3.4)^2=9^2+5^2=106=M^2+3N^2,$$

welches ebenfalls unmöglich ist.

Da ich nun nicht einmal ein Exempel finden kann, welches einträfe, so schliesse ich daraus, dass eine gewisse Bedingung in den Zahlen a, b, P und Q müsse weggelassen seyn, welche ich aber nicht ausfindig machen kann.

Euler.

LETTRE CLXII.

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE Amendement à ce théorème

St. Petersburg d. 24. Januar 1756.

So leid es mir ist, dass ich Ew. durch mein unrecht abgeschriebenes theorema einige Mühe verursacht habe, so lieb ist es mir hingegen, dass sie selbiges Ihrer Untersuchung werth gehalten, denn wenn Sie nichts darauf geantwortet hätten, würde ich auch gewiss nicht mehr daran gedacht haben, Nachdem ich solches aber auf Dero Veranlassung wieder übersehen, so habe ich zuletzt bemerket, dass es unendlich generaler gemacht werden kann, und der bey einer andern Gelegenheit von mir angeführte Vers: *Si non errasset, fecerat ille minus* findet hier abermal Statt. Es soll heissen: Si $aa+bb=PP+eQQ$, ubi P et Q sint numeri rationales, poterit etiam fieri

$$aa+(b+2em(mb-mP-Q))^2=MM+eNN,$$

ita ut M et N sint rationales, modo pro m sumatur numerus rationalis. In dem von Ew. angeführten ersten Exempel, woselbst $a=1$, $b=4$, $P=3$, $Q=2$ und $e=2$, wird $1^2+4^2=3^2+2.2^2$, ergo etiam $1^2+(4+4mm-8m)^2$ seu $1^2+2^2(m-1)^4=MM+2NN$ de quo dubitare nefas. In dem andern exemple, wo $a=9$, $b=4$, $P=7$, $Q=4$, $e=3$, oder $9^2+4^2=7^2+3.4^2$ wird

$$9^2+(4-24m-18mm)^2=M^2+3N^2,$$

welches gleichfalls eine gewisse Wahrheit ist. So oft nun

$$aa+(b+2em(mb-mP-Q))^2$$

ein numerus primus ist, so kann er diese Form $MM+eNN$ haben, wenn gleich $aa+bb$ kein numerus primus ist . . . .

Goldbach.

LETTRE CLXIII.

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Question relative au roulis et au tangage. Remarques sur le théorème précédent.

Berlin d. 10. Februar 1756.

— — Noch hat unser Joh. Albert keinen Preis bey der Pariser Akademie erhalten. Der Name desjenigen, so im vorigen Jahre den Preis erhalten, wurde nicht sogleich bekannt gemacht; man wusste nur, dass es ein junger Mensch war, welches vielleicht zu der Ew. hinterbrachten Nachricht Anlass gegeben haben mag. Es ist mir aber seitdem die Preisschrift selbst zugeschickt worden, deren Verfasser M. Chauchot, sous-constructeur de vaisseaux, genannt wird, welcher aber bald darauf gestorben seyn soll. Die Frage war: Diminuer le plus qu'il est possible les mouvemens de

roulis et de tangage d'un navire etc. Da aber die obgemeldte Schrift kein völliges Genüge geleistet, so ist eben diese Frage nochmals aufs künftige Jahr vorgelegt worden, worüber wir jetzt würklich arbeiten. Von meiner Danksagung an des Hrn. Comte d'Argenson Excellenz habe ich so wenig, als von allen meinen Briefen eine Abschrift behalten. Sie war schlecht gerathen, und also nicht wohl möglich viel darin zu verbessern. Mir hat sie am wenigsten gefallen, und deswegen wollt' ich kein Andenken davon aufbehalten.

Ew. theorema, dass, wenn $aa+bb=PP+eQQ$, auch $aa+(b+2em(mb-mP-Q))^2=MM+eNN$ sey, hat seine völlige Richtigkeit und ist deswegen sehr merkwürdig, dass dadurch dieses problema solvirt werden kann:

> Datis duobus quadratis aa et bb, quorum summa sit numerus formae P^2+eQ^2, invenire infinita alia quadrata loco bb substituenda, quae priori aa addita summam exhibeant, quae pariter sit numerus formae P^2+eQ^2.

Hier wird also das erstere quadratum aa beybehalten und anstatt des andern bb unendlich viel andere Werthe angegeben, dass die Summ allzeit in dieser Form P^2+eQ^2 enthalten sey. Man könnte also das problema noch generaler also proponiren:

> Proposita summa duorum quadratorum $aa+bb$, quae sit numerus formae P^2+eQ^2, invenire infinitas alias binorum quadratorum summas $xx+yy$, quae in eadem forma contineantur;

wovon ich folgende Solution gefunden: Cum sit

$$aa+bb=P^2+eQ^2$$

tribuantur numeris x et y sequentes valores

$$x = a(tt + evv + rr - ss) + 2r(bs - Pt - eQv)$$
$$y = b(tt + evv - rr + ss) + 2s(ar - Pt - eQv)$$

ubi quidem pro litteris r, s, t, v numeros quoscunque accipere licet. Tum autem utique erit $xx + yy = M^2 + eN^2$; fiet enim

$$M = P(rr + ss + tt - evv) + 2t(eQv - ar - bs)$$

et

$$N = Q(rr + ss - tt + evv) + 2v(Pt - ar - bs).$$

Solchergestalt werden nicht nur unendlich viele, sondern sogar alle mögliche Werthe für x und y gefunden.

In diesem problemate wird vorausgesetzt, dass schon ein casus, da $aa + bb = P^2 + eQ^2$ bekannt sey, um daraus alle übrige zu finden; allein dieses ist auch nicht einmal nöthig, sondern proposito numero e quocunque, können unmittelbar alle mögliche summae binorum quadratorum angegeben werden, welche zugleich in der Form $P^2 + eQ^2$ enthalten sind. Man nehme nehmlich sogleich $a = exx - yy + zz$ und $b = 2yz$, so wird $aa + bb = (exx - yy - zz)^2 + e(2xz)^2$. Weil nun x, y und z nach Belieben angenommen werden können, so erstreckt sich diese Solution auf alle mögliche Fälle und scheinet also vor der vorhergehenden keinen geringen Vorzug zu haben.

Euler.

LETTRE CLXIV.

=

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Même sujet.

St. Petersburg d. 25. März 1756.

Die von Ew. angeführte aequatio

$$aa + bb = (exx - yy - zz)^2 + e(2xz)^2$$

ist aus unserer vorigen correspondance schon bekannt, welcher Umstand Deroselben vielleicht entfallen war. Sonst habe ich auch noch einen andern hierher gehörigen *lusum naturae* bemerkt, nemlich wenn $1 + 4efg = PP + eQQ$, erit etiam $1 + 4e(fg + effyyxx) = (P - 2efyx)^2 + e(Q - x)^2$ posita $x = \frac{4fPy + 2Q}{4efyy + 1}$; so oft nun $e(g + efyyxx)$ ein numerus quadratus ist (posito valore dicto ipsius x), so oft kann $PP + eQQ$ in diese Form verwandelt werden $MM + fNN$, existentibus M et N rationalibus, denn es wird seyn

$$M = (P - 2efyx) \text{ und } N = Q - x.$$

Goldbach.

P. S. d. 27 März 1756. Es scheinet, dass die Uebereilungsfehler bey mir in den Briefen an Ew. je länger je gemeiner werden, wie es in dem letzten abermal

$$x = 4fPy + 2Q \text{ und nicht } x = \frac{4fPy+2Q}{4efyy+1}$$

hätte heissen sollen, welches ohne Beschwerde zu corrigiren bitte. Im übrigen wird vielleicht dieses raisonnement zum Beweise, dass ein numerus primus von dieser Form $1+4efg$ in $PP+eQQ$ verwandelt werden kann, etwas beytragen:

Si positis e, f, g rationalibus, fieri potest

$$1+4efg = PP+eQQ$$

ita ut P et Q sint rationales, poterit etiam fieri

$$1+4efg = MM+fNN = RR+gSS$$

ita ut M, N, R, S sint rationales (cum in numero $1+4efg$ numeri e, f et g sint natura sua permutabiles). Atqui in quovis numero primo $1+4efg = aa+bb$ verum est prius (nam poni potest $e=1$, $P=a$, $Q=b$), ergo et posterius.

LETTRE CLXV.

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Même sujet.

Berlin d. 17. April 1756.

Es hat seine völlige Richtigkeit, dass wenn $1+4efg = P^2+eQ^2$, auch seyn werde

$$(P-2efyx)^2 + e(Q-x)^2 = 1+4ef(g-efy^2x^2)$$

posita $x = 4fPy+2Q$, und also auch dass, so oft $e(g+efy^2x^2)$ ein quadratum ist, diese Form in M^2+fN^2 verwandelt werde. Hieraus aber möchte wenig zu folgern seyn. Denn da e, f, g numeri inter se primi zu seyn pflegen, so sind die factores e und $g+efy^2x^2$ inter se primi, folglich kann ihr Product kein quadratum seyn; es wäre denn, dass man für y, x numeros fractos zulassen wollte, in welchem Fall man sich in noch grössere Schwierigkeiten verwickeln würde. Denn es sey $e=2, f=5$ und $g=1$, also $1+4efg=41=3^2+2.4^2$. Dahero $P=3$ und $Q=4$. Nun nehme man $x=4fPy+2Q=60y+8$, so ist allerdings $1+40(1+10y^2x^2)=(3-20yx)^2+2(4-x)^2$. Es wäre also die Frage, ob $e(g+efy^2x^2)=2(1+10y^2x^2)$ ein quadratum seyn könnte, welches aber unmöglich ist, so lang für x und y nur numeri integri angenommen werden. Wollte man aber auch Brüche zulassen, und für x seinen Werth $60y+8$ setzen, so wäre $yx=60y^2+8y$, also $y^2x^2=3600y^4+960y^3+64yy$, und dahero geriethe man auf diese Frage, ob folgende Formul

$$72000y^4+19200y^3+1280y^2+2$$

ein Quadrat seyn könne. Wenn sich aber auch solches nach vieler Mühe finden sollte, so sehe ich nicht, was man damit gewonnen hätte. Inzwischen ist aber gewiss, dass diese Formul auch in gebrochenen Zahlen niemals ein Quadrat werden könne. Denn eher man noch den Werth für x substituirt, so setze man $yx=m$, also $2+20m^2=\square$. Ferner $m=\frac{n}{4}$, folglich $2+\frac{5}{4}nn=\square$ oder $5nn+8=\square$, welches offenbar unmöglich ist.

Das von Ew. angeführte Argument, dass wenn

$$1+4efg=P^2+eQ^2,$$

auch seyn müsse $1+4efg=M^2+fN^2=R^2+gS^2$, weil kein Grund vorhanden wäre, warum eine solche Auflösung bey einem der Factoren e, f, g mehr Platz haben sollte, als bey den andern, würde in der Metaphysic für eine herrliche Demonstration passiren können, wo man sich mit Beweisthümern zu begnügen pflegt, welche bey weitem nicht so bündig sind. Allein in der Mathematic kommen mir dergleichen Schlüsse immer verdächtig vor. Ew. dehnen zwar diesen Satz auf alle numeros rationales überhaupt aus, in

welchem Fall ich denselben für wahr halte, wenn nur $1+4efg$ ein numerus primus ist; welche nothwendige Bedingung gleichwohl im argumento nicht enthalten ist, und auch nicht erhellet, warum dieselbe hinzugesetzt werden sollte. Ohne diese Bedingung aber ist der Satz falsch, denn $1+4.1.5$ ist wohl $=P^2+5Q^2$ und doch ist $1+4.1.5=M^2+1.N^2$ unmöglich. Hernach, wenn man auch Mittel fände, die Bedingung, dass $1+4efg$ ein numerus primus seyn müsse, in den Beweis einzuflechten, so sehe ich keinen Grund, warum der Satz nicht auch wahr seyn sollte, wenn für P, Q, M, N, R, S nicht nur numeri rationales, sondern auch integri genommen würden; denn wenn die Reduction $1+4efg=P^2+eQ^2$ in integris Platz hat, so enthält der angegebene Beweis keinen Grund, warum die andern Reductionen nicht auch in integris Platz haben sollten. Allein in diesem Fall ist der Satz nicht mehr der Wahrheit gemäss, wie aus diesem Exempel erhellet: Es sey $e=3$, $f=5$, $g=11$, so wird $1+4efg=661$ (numero primo). Nun ist zwar $661=19^2+3.10^2$ und auch $661=16^2+5.9^2$; doch aber kann die dritte Resolution $661=R^2+11.S^2$ in integris auf keinerley Art bestehen. In Brüchen findet dieselbe aber Statt, indem $661=\left(\frac{13}{2}\right)^2+11\left(\frac{15}{2}\right)^2$; woraus klar abzunehmen, dass in dergleichen ratiociniis die grösste Behutsamkeit gebraucht werden müsse. Ich habe solches bey einigen, über einige theoremata Fermatiana gegebenen Demonstrationen zur Genüge erfahren. Als z. Ex. war der Beweis sehr leicht, dass wenn zwey summae duorum quadratorum mit einander multiplicirt werden, das Product auch eine summa duorum quadratorum seyn müsse, indem

$$(aa+bb)(cc+dd)=(ac\pm bd)^2+(ad\mp bc)^2.$$

Wer sollte nun daraus nicht schliessen, dass wenn eine summa duorum quadratorum durch eine andere summam duorum quadratorum getheilt werden kann, der Quotient nicht auch eine summa duorum quadratorum seyn müsse?

Die Sache ist zwar wahr; allein der erwähnte Schluss ist unrichtig, denn wenn derselbe richtig wäre, müsste auch dieser richtig seyn: Productum ex duobus numeris paribus semper est par: ergo si numerus par per alium sit divisibilis, quotus quoque erit par; welches doch offenbar falsch wäre.

Euler.

LETTRE CLXVI.

Goldbach à Euler.

Sommaire. Même sujet.

St. Petersburg d. 18. Mai 1756.

Was die Aequation

$$1+efg=PP+eQQ=MM+fNN=\text{etc.}$$

betrifft, bin ich mit Ew. einerley Meinung, indem die Natur der Zahlen P, Q, M etc., nehmlich ob es numeri integri, oder fracti, oder surdi seyn sollen, nicht bestimmet wird, ohngeachtet die numeri integri e, f und g permutabiles sind. Dass aber die grosse Zahl $72000y^4+19200y^3+1280yy+2$ kein Quadrat seyn kann, folget alsofort, wenn man dieselbe als ein exemplum regulae von $4n+2=\square$ betrachtet.

Indessen bekenne ich, dass ich noch nicht recht einsehe, warum Ew. zur Wahrheit dieser Aequation

$$1+4ef=PP+eQQ$$

*

erfordern, dass $1+4ef$ ein numerus primus sey, wenn P et Q rationales seyn sollen, da allein in dem casu, ubi $f=e+kk-1$ unzählige Exempel vorhanden sind, dass auch numeri non primi diese Eigenschaft haben können, als posita $e=k=3$, fit $1+4.3.11=5^2+3.6^2$.

Nachfolgendes theorema halte ich pro demonstrabili: Sit $p=aa+bb$ et sit $1+mQQ$ summa duorum quadratorum, erit etiam $p=aa+bb=PP+(xx-mp)QQ$, ita ut, si reliqui numeri sint rationales, fiat etiam x rationalis.

Goldbach.

LETTRE CLXVII.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Même sujet.

Berlin d. 11. Juni 1756.

Dass diese grosse Zahl $72000y^4+19200y^3+1280y^2+2$ kein Quadrat seyn könne, folget nur alsdann aus der Formul $4n+2=\square$, wenn y ein numerus integer ist. So viel ich mich aber erinnere, begriff y auch numeros fractos, und da wird allerdings eine besondere Demonstration erfordert. Man darf nur diese Formul $8xx+2$ betrachten, welche, wenn x auch ein Bruch seyn kann, infinitis modis ein Quadrat seyn kann, als $x=\frac{1}{2}$, $x=\frac{7}{2}$, etc. Dass nun ein Gleiches bey der obigen Formul nicht Statt finde, muss besonders bewiesen werden.

Dass ich zur Wahrheit dieser Aequation $1+4ef=PP+eQQ$ erfordere, dass $1+4ef$ ein numerus primus seyn müsse, ist die Ursach, weil wenn $1+4ef$ kein numerus primus ist, solche Fälle vorkommen, da $1+4ef$ nicht dieser Formul $PP+eQQ$ gleich seyn kann; denn es sey z. Ex. $e=1$, $f=5$, so ist gewiss $1+4ef=21$ nicht gleich $PP+QQ$. Inzwischen gebe ich gern zu, dass $1+4ef=PP+eQQ$ in unendlich vielen Fällen wahr ist, wenn gleich $1+4ef$ kein numerus primus ist. Wenn aber auch nur ein einiger Fall in contrarium könnte angeführt werden, so wäre derselbe hinlänglich die Wahrheit des Satzes zu zernichten. Hingegen, wenn diese Bedingung hinzugesetzt wird, dass $1+4ef$ ein numerus primus seyn müsse, so kann kein Fall in contrarium angeführt werden, wenn man nehmlich für P und Q die Brüche nicht ausschliesst, und deswegen glaube ich, dass der Satz wahr sey, ungeacht ich denselben nicht beweisen kann. Wenn aber die Bedingung, dass $1+4ef=$ numero primo, weggelassen wird, so kann man sicher behaupten, dass der Satz $1+4ef=PP+eQQ$ nicht wahr sey, weil die Anführung eines einzigen Exempels in contrarium hinreichend ist, denselben umzustossen.

Wenn man aber für P und Q nur numeros integros zulässt, zugleich aber die Condition festsetzt, dass $1+4ef$ ein numerus primus seyn müsse, so ist die Aequation $1+4ef=PP+eQQ$ in genere gewiss nicht demonstrabel, indem ich unendlich viel Fälle in contrarium anführen kann. Ja, das von Ew. angeführte Exempel, dass $1+4.3.11=133=5^2+3.6^2$, ungeacht 133 kein numerus primus ist, reichet eine Exception dar, indem $1+4.3.11$ nicht ist P^2+11Q^2, welches gleichwohl seyn müsste, wenn der Satz allgemein wahr wäre.

Das theorema, so Ew. anführen, dass wenn $p=aa+bb$ und $1+mQ^2$ summa duorum quadratorum, auch seyn werde $p=aa+bb=P^2+(xx-mp)Q^2$, ist nicht nur demonstrabel, sondern man kann auch in genere die Werthe für P und x anzeigen, welche dieser Aequation ein Genüge leisten. Denn es sey $1+mQ^2=rr+ss$, so nehme man $P=ar-bs$ und $x=\frac{as+br}{Q}$, alsdann wird augenscheinlich $aa+bb=P^2+(xx-mp)Q^2$. Denn da

$$P^2=aarr-2abrs+bbss$$
$$xxQQ=aass+2abrs+bbrr$$
$$-mpQQ\ (\text{ob } p=aa+bb)=-maaQQ-mbbQQ$$

folglich $P^2+(xx-mp)Q^2=$

$$(aa+bb)(rr+ss)-m(aa+bb)QQ=aa+bb,$$

weil $rr+ss=1+mQ^2$, per hypothesin.

Euler.

LETTRE CLXVIII.

=

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Problème du cavalier au jeu des échecs.

Berlin d. 26. April 1757.

(Lettre de recommandation, donnée à Aepinus).

— — — Die Erinnerung einer mir vormals vorgelegten Aufgabe hat mir neulich zu artigen Untersuchungen Anlass gegeben, auf welche sonsten die Analysis keinen Einfluss zu haben scheinen möchte. Die Frage war: Man soll mit einem Springer auf einem Schachbrette alle 64 Plätze dergestalt durchlaufen, dass derselbe keinen mehr als einmal betrete. Zu diesem Ende wurden alle Plätze mit Marquen belegt, welche bey Berührung des Springers weggenommen wurden. Es wurde noch hinzugesetzt, dass man von einem gegebenen Platz den Anfang machen soll. Diese letztere Bedingung schien mir die Frage höchst schwer zu machen, denn ich hatte bald einige Marschrouten gefunden, bey welchen mir

aber der Anfang musste freygelassen werden. Ich sahe aber, wenn die Marschroute in se rediens wäre, also dass der Springer von dem letzten Platz wieder auf den ersten springen könnte, alsdann auch diese Schwierigkeit wegfallen würde. Nach einigen hierüber angestellten Versuchen habe ich endlich eine sichere Methode gefunden, ohne zu probiren, soviel dergleichen Marschrouten ausfindig zu machen, als man will, (doch ist die Zahl aller möglichen nicht unendlich). Eine solche wird in beygehender Figur vorgestellt:

54	49	40	35	56	47	42	33
39	36	55	48	41	34	59	46
50	53	38	57	62	45	32	43
37	12	29	52	31	58	19	60
28	51	26	63	20	61	44	5
11	64	13	30	25	6	21	18
14	27	2	9	16	23	4	7
1	10	15	24	3	8	17	22

Der Springer springt nehmlich nach der Ordnung der Zahlen. Weil vom letzten 64 auf N. 1 ein Springerzug ist, so ist diese Marschroute in se rediens.

Hier ist noch diese Eigenschaft angebracht, dass in areolis oppositis die differentia numerorum allenthalben 32 ist.

Euler.

LETTRE CLXIX.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Troubles de la guerre. Notices sur la famille d'Euler.

Berlin d. 29. Juni 1762.

Nach dem so schweren Ungewitter, welches mich ausser Stand gesetzt, meine schuldigste Ehrerbietung Ew. schriftlich zu bezeugen, habe ich mich in der völligen Ungewissheit Dero Zustands noch nicht unterstehen dürfen meine gehorsamste Pflicht bey Ew. abzustatten. Ich hatte deswegen den Hrn. Prof. Müller ersuchet, mir darüber die nöthigen Erläuterungen zu ertheilen. Um so viel lebhafter war demnach meine Freude, als ich vorgestern Ew. gütigstes Schreiben*) zu erhalten das Glück hatte, und ich kann so wenig mein Vergnügen über Dero Wohlseyn als die dankbarsten Empfindungen meines Herzens über Dero fortdauernde ganz ungemein gnädige Gesinnung gegen mich und die Meinigen,

*) Cette lettre manque.

mit Worten ausdrücken; insonderheit bin ich über das huldreiche Andenken, dessen Ew. meinen ältesten Sohn haben würdigen wollen, innigst gerührt, und derselbe ist darüber auch vor Freude ganz ausser sich selbst. Nachdem ihm von Sr. K. M. eine Stelle bey unserer Akademie allergnädigst ertheilet worden, so hat er sich schon vor einigen Jahren zu unserm Vergnügen verheirathet, und da sein Einkommen wegen der Kriegsunruhen noch sehr gering, so lebt er mit seiner Frau bey uns und wir haben die Freude ein artiges Grosstöchterleyn erlebt zu haben. Die Göttliche Vorsehung hat bisher bey so mancherley Trübsalen so gnädiglich und wunderbar über uns gewaltet, dass wir auch wegen des Künftigen unser festes Vertrauen auf Dieselbe setzen. Mein zweiter Sohn, der auch noch in Petersburg geboren, hat sich mit allem Fleiss auf die Medicin gelegt und ist gegenwärtig in Halle, wohin ich ihn vor einem Jahr gebracht habe, und gedenket auf künftigen Herbst zu promoviren. Ich habe den Trost, dass seine Herren Professores seinen Fleiss und gute Aufführung nicht genug rühmen können. Mein jüngster Sohn, der hier A. 1743 geboren, hat sich dem Kriegswesen gewidmet und ist nun Lieutenant bey der Artillerie, wo man ungemein wohl mit ihm zufrieden ist. Ausser diesen haben wir noch zwey Töchter und leben hier in dem grössten Vergnügen durch die Gnade Gottes beysammen, ungeachtet hier Jedermann über die ausgestandenen harten Drangsale die bittersten Klagen führt; und ich auch das Unglück gehabt, dass mein Landgut in Charlottenburg, als unsere Stadt in Russischen Händen war, rein ausgeplündert worden. Der Hr. General Tschernyscheff, welcher mich vormals besucht hatte, schickte mir zwar sogleich eine Salvegarde, sie kam aber doch zu spät und ich habe meine Hoffnung zu Ersetzung des erlittenen Verlusts noch nicht aufgegeben, da ich deswegen sowohl von des Hrn. Hettmanns als des Hrn. Grosskanzlers Hochgräfl. Excellenz die gnädigste Versicherung erhalten habe, und mir von der Akademie angerathen worden, mich auch deswegen bey unserm Gesandten, dem Hrn. Baron von Goltz, zu melden; doch scheinen mir die gegenwärtigen Umstände dazu noch nicht die günstigsten zu seyn. Doch überwiegt unsern Kummer himmelweit unsere inbrünstige Freude über die höchst wunderbare und göttliche Errettung unseres allertheuersten Königs, und unsere Kirchen erschallen immer von den herzlichsten Lobeserhebungen Seiner glorwürdigst regierenden Russisch Kaiserl. Majestät, welchen der Allerhöchste mit allem nur möglichen Segen überschütten wolle!

Ich habe das feste Vertrauen zu Ew. gnädigen Zuneigung, dass Dieselben über die weitläufige Erzählung meiner Umstände nicht ungeduldig werden, sondern uns noch ferner Dero hochgeschätzte Wohlgewogenheit zuzuwenden geruhen werden, zu welcher ich mich sammt den Meinigen auf das inständigste ganz gehorsamst empfehle. Der Allmächtige Gott wolle Ew. bey beständiger Gesundheit und allem wahrhaftigen Wohlseyn immerfort erhalten und in allen Stücken Seinen reichen und herzerquickenden Segen verspüren lassen. Ich habe die Ehre u. s. w.

Euler.

LETTRE CLXX.

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Théorème d'analyse.

Berlin d. 25. September 1762.

Simple lettre de politesse, comme la précédente. Un feuillet annexé contient ce qui suit:

Theorema. Si habeantur numeri quotcunque inaequales a, b, c, d etc., ex iisque formentur sequentes fractiones

$$\frac{a^n}{(a-b)(a-c)(a-d)\text{ etc.}},\ \frac{b^n}{(b-a)(b-c)(b-d)\text{ etc.}},\ \frac{c^n}{(c-a)(c-b)(c-d)\text{ etc.}},\ \frac{d^n}{(d-a)(d-b)(d-c)\text{ etc.}},\ \text{etc.}$$

earum summa semper est $=0$, si exponens n (quem integrum intelligi oportet) minor sit numero factorum in singulis denominatoribus. Sin autem ei sit aequalis, summa fit $=1$.

Exemplum. Sint numeri propositi 10, 9, 7, 4, 2 erit

$$\frac{10^n}{1.3.6.8} - \frac{9^n}{1.2.5.7} + \frac{7^n}{3.2.3.5} - \frac{4^n}{6.5.3.2} + \frac{2^n}{8.7.5.2} = 0$$

si $n < 4$, at si $n = 4$, summa est $= 1$. Sit $n = 0$, erit

$$\frac{1}{144} - \frac{1}{70} + \frac{1}{90} - \frac{1}{180} + \frac{1}{560} = 0$$

est manifestum. In genere, fractionibus ad communem denominatorem reductis fit

$$35.10^n - 72.9^n + 56.7^n - 28.4^n + 9.2^n = 0,$$

dummodo $n < 4$.

Dieses theorema scheint nicht wenig merkwürdig zu seyn; es däucht mich aber, Ew. haben mir schon längst dergleichen etwas mitzutheilen geruhet.

Euler.

LETTRE CLXXI.

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Billet de remercîment. Encore une observation sur le théorème des lettres précédentes relatif à la décomposition des nombres en quarrés.

St. Petersburg d. 19. October 1762.

Ew. beyde letztere Briefe sind mir d. 15. Juli und 11 October allhier richtig abgegeben worden. Für das mir communicirte schöne theorema sage ich schuldigsten Dank, befinde mich aber jetzo gänzlich ausser Stande selbiges pro dignitate zu betrachten*).

Ich habe unlängst einige tomos vom Hamburger Magazin

*) Les infirmités de l'âge de l'auteur se manifestent aussi dans l'écriture de cette lettre qui, quoique belle encore, est cependant incertaine et tremblante. Le lecteur voudra bien remarquer qu'il y a un espace de six ans entre la date de cette lettre et celle de la lettre précédente.

durchblättert und darin die grossen éloges welche Ew. an unterschiedenen Orten so billig beygelegt werden, mit ungemeinem Vergnügen beobachtet. Dero Hrn. Sohne gratulire ich von ganzem Herzen zur abermaligen Petersburgischen pièce victorieuse.

Goldbach.

P. S. Ich habe observiret, dass der Aequation

$$aa + bb = PP + eQQ$$

allezeit ein Gnügen geschiehet positis

$$P = \frac{bb - aa}{b},\ e = 3bb - aa,\ Q = \frac{\pm a}{b},$$

woraus unzählige dergleichen valores pro summa $aa + bb$ formiret werden können.

LETTRE CLXXII.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Décomposition des nombres en carés; suite. Autre théorème de nombres.

Berlin d. 9. November 1762.

Die Frage, welche Ew. zu berühren belieben, was für Zahlen in einer jeden von diesen Formuln $aa + bb$ und $pp + eqq$ zugleich enthalten sind? ist in der Lehre von den Zahlen nicht nur von der grössten Wichtigkeit, sondern fasset auch solche besondere Schwierigkeiten in sich, welche dieselbe höchst merkwürdig machen, insonderheit wenn mehr als zwey Formuln vorgeschrieben werden. Wenn nur zwo gegeben sind, und man sucht alle Zahlen N, so zugleich in diesen beyden Formuln $aa + mbb$ und $cc + ndd$ enthalten sind, wo m und n gegebene Zahlen sind, so finde ich $N = (mpp + nqq + rr + mnss)^2 - 4mn(pq - rs)^2$, denn daraus wird

$$N = (mpp - nqq - rr + mnss)^2 + m(2pr + 2nqs)^2 = (mpp - nqq + rr - mnss)^2 + n(2qr + 2mps)^2.$$

Wenn aber mehr als zwey dergleichen Formuln vorgegeben sind, in welchen die Zahlen N enthalten seyn sollen, so hört die algebraische Hülfe fast gänzlich auf, und eben deswegen ist es um so viel merkwürdiger, dass alsdann dergleichen Fragen auf eine ganz andere Art ganz leicht aufgelöset werden können, wobey aber der Beweis noch fehlet. Also wenn solche Zahlen verlangt werden, so zugleich in diesen Formuln $aa + bb$, $cc + 2dd$, $ee + 3ff$, $gg + 5hh$, enthalten sind, so darf man nur die Zahl nehmen, die sich durch die gegebenen 1, 2, 3, 5 theilen lässt: diese ist nun 30. Alsdann, so oft $4.30x + 1 = 120x + 1$ ein numerus primus ist, so hat man eine Zahl für N, und zwey oder mehr dergleichen numeri primi, mit einander multiplicirt, geben ebenfalls Zahlen für N. Dahero sind diese numeri primi $120x + 1$ folgende: 241, 601, 1201, 1321, 1801 etc. von welchen der erste

$$241 = 15^2 + 4^2 = 13^2 + 2.6^2 = 7^2 + 3.8^2 = 14^2 + 5.3^2,$$

wobey dieses insbesondere zu merken ist, dass diese Eigenschaft nur den in der Formul $120x + 1$ enthaltenen numeris primis zukommt. Hernach, da Ew. gezeigt, dass eine summa duorum quadratorum $aa + bb$ auch in dieser Form $PP + eQQ$ enthalten ist, wenn $e = 3bb - aa$ oder $3aa - bb$, ja noch allgemeiner, wenn $e = (2\alpha + 1)bb - \alpha\alpha aa$, so können daher noch gar schöne Erläuterungen der obigen Eigenschaften gezogen werden, als z. Ex. dass eine solche Zahl $aa + nbb$ auch zugleich in dieser Form

$$PP + ((2\alpha + n)aa - \alpha\alpha bb)QQ$$

enthalten ist, wo es sich aber fügen kann, dass P und Q Brüche seyn müssen. Als, es sey $a = 7$, $n = 3$, $b = 8$ und

die Zahl $aa + nbb = 241$, so ist dieselbe auch in dieser Form $PP + eQQ$ enthalten, sumto

$$e = (2\alpha + 3)\,49 - 64\alpha\alpha = 147 + 98\alpha - 64\alpha\alpha = 147 + 49\beta - 16\beta\beta \text{ (posito } 2\alpha = \beta).$$

Solche Zahlen für e sind demnach

$$147,\ \begin{matrix} 82, & 181, & 150, & 87, \\ 180, & -15, & & \end{matrix}$$

oder (per □ dividendo) 3, 5, 6, 82, 87, 181, wobey also sehr merkwürdig ist, dass die Zahl 241 auch in dieser Form $PP + 82QQ$ enthalten ist, welches aus obiger Regel nicht kann erkannt werden, denn hier ist $P = \frac{81}{7}$ und $Q = \frac{8}{7}$.

Den Beweis von dem theoremate numerico, wovon letztens Ew. Erwähnung zu thun die Ehre gehabt, ist auch ganz sonderbar. Ich betrachtete diesen Bruch

$$\frac{x^n}{(x-a)(x-b)(x-c)\text{ etc.}},$$

vom welchem bekannt ist, dass sich derselbe in diese einfache Brüche $\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \text{etc.}$ auflösen lässt, und die Zahlen A, B, C, numeri constantes werden, wenn nur der exponens n kleiner ist, als der numerus factorum in denominatore. Nun aber bestimme ich die Zähler A, B, C, etc. folgendergestalt: Um A zu finden, multiplicire ich alles in $x - a$ und bekomme

$$A = \frac{x^n}{(x-b)(x-c)\text{ etc.}} - \frac{B(x-a)}{x-b} - \frac{C(x-a)}{x-c} - \text{etc.},$$

und weil ich weiss, dass A nicht von x dependirt, so muss für A immer einerley Werth herauskommen, ich mag für x annehmen was ich will. Ich setze also $x = a$, und da bekomme ich $A = \frac{a^n}{(a-b)(a-c)\text{ etc.}}$, ebenso wird

$$B = \frac{b^n}{(b-a)(b-c)\text{ etc.}},\quad C = \frac{c^n}{(c-a)(c-b)\text{ etc.}},$$

also ist in genere

$$\frac{x^n}{(x-a)(x-b)(x-c)\text{ etc.}} = \frac{a^n}{(a-b)(a-c)\ldots(x-a)} + \frac{b^n}{(b-a)(b-c)\ldots(x-b)} + \frac{c^n}{(c-a)(c-b)\ldots(x-c)} + \text{etc.}$$

und diese letztern Brüche auf die andere Seite hinübergetragen:

$$\frac{a^n}{(a-b)(a-c)(a-d)\ldots(a-x)} + \frac{b^n}{(b-a)(b-c)(b-d)\ldots(b-x)} + \frac{c^n}{(c-a)(c-b)(c-d)\ldots(c-x)} + \text{etc.} = 0.$$

Euler.

LETTRE CLXXIII.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Mécontentement de la tournure que prennent les affaires de l'Académie de Berlin. Allusion au retour d'E. en Russie.

Berlin d. 1. October 1763.

(Extrait).

— — Noch hat sich hier der Anschein nicht verloren, dass die hiesige Akademie in eine Académie françoise verwandelt werden soll. So sehr ich mich vor einer nochmaligen Ortsveränderung entsetze, so würde ich mich doch in diesem Fall dazu entschliessen müssen, und nichts würde mich dabey herzlicher erfreuen, als Ew. nochmals sehen zu können.

Euler.

LETTRE CLXXIV.

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Arrivée de D'Alembert à Berlin. Sa nomination probable à la présidence de l'académie.

Berlin d. 11. October 1763.

(Extrait).

— — Als sich letztens M. D'Alembert einige Zeit hier aufhielt und von S. M. dem König mit den höchsten Gnadenbezeugungen überhäuffet wurde, hatte ich auch Gelegenheit denselben persönlich kennen zu lernen, nachdem schon seit geraumer Zeit unser Briefwechsel, wegen einiger gelehrter Streitigkeiten unterbrochen gewesen, in welche ich mich nicht einlassen wollte. Nun aber ist unsere Freundschaft auf das vollkommenste wieder hergestellt worden, und man kann mir nicht genug beschreiben, mit wie grossen Lobeserhebungen er beständig mit Sr. königl. Majestät von mir gesprochen. Unter der Hand wird versichert, dass er doch künftigen May wiederkommen und die Präsidentenstelle unserer Akademie antreten würde. Euler.

LETTRE CLXXV.

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Démonstration d'un théorème proposé par Goldbach et relatif à la décomposition des nombres en carrés. La présidence de la Société de Göttingue offerte à Euler, dans le cas que Haller persiste à y résigner.

Berlin d. 15. November 1763.

Ew. mir überschriebenes theorema hat bei mir die lebhafteste Freude erweckt, weil ich daraus schliessen zu können glaube, dass Dero Gemüth besonders aufgemuntert und vergnügt gewesen. Ich habe dieses theorema mit allem Fleiss untersuchet und endlich gefunden, dass sich dasselbe folgendergestalt ganz leicht beweisen lässt:

Si P^2+2eQ^2 est quadratum, ponatur $P^2+2eQ^2=R^2$, addatur utrinque P^2, erit $2P^2+2eQ^2=R^2+P^2$ et per 2 dividendo

$$P^2+eQ^2=\tfrac{1}{2}(R^2+P^2)=\left(\frac{R+P}{2}\right)^2+\left(\frac{R-P}{2}\right)^2$$

ideoque P^2+eQ^2 summa duorum quadratorum. Q. E. D.

— — Mir hat die hiesige französische Colonie auch die Ehre angethan und mich Ancien ihrer Kirchen und Mitglied des Consistorii erwählet, ob ich aber diese Ehre lang geniessen werde, ist sehr zweifelhaft. Auf künftige Ostern muss sich der Herr von Haller erklären, ob er seine Stelle als Präsident der Göttingischen Akademie wieder antreten will oder nicht. Im letztern Fall dürfte ich genöthigt werden, eine sehr grosse Veränderung vorzunehmen.

Euler.

LETTRE CLXXVI.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Fait intéressant relatif aux *Leçons de calcul intégral*. Affaires de l'Académie de Berlin. Jean Bernoulli III.

Berlin d. 17. December 1763.

(Dernière lettre).

— — Schon vor einigen Monaten habe ich mein Werk von dem Calculo integrali, woran ich schon seit vielen Jahren gearbeitet, völlig zu Stande gebracht, und die Haude'sche Buchhandlung allhier ist Willens dasselbe nächstens zu verlegen. Das Gerücht davon hatte einen jungen lehrbegierigen Menschen aus der Schweiz hierhergetrieben, welcher sich nichts anders als die Erlaubniss ausgebeten, dieses Werk abzuschreiben, und ist darauf wieder zurückgereiset. Das Wunderbarste dabey ist, dass dieser Mensch von seiner Profession ein Kürschner gewesen.

Hätte ich dieses Schreiben nur einen Posttag aufschieben dürfen, so wäre ich vielleicht im Stande gewesen, Ew. einige Nachricht von der neuen Einrichtung der hiesigen Akademie zu geben, weil der junge Herr Bernoulli*), ein Sohn des Johann Bernoulli, der in Petersburg gewesen, der vor einiger Zeit hierher verschrieben worden, die Versicherung erhalten, dass um die Mitte dieses Monats, bey der Ankunft Sr. königl. Majestät alles bey der Akademie regulirt werden soll.

Euler.

*) Jean Bernoulli III, petit fils de Jean B I. et fils de Jean B. II. né à Bâle le 4 nov. 1744, mort à Berlin le 13 juillet 1807.

LETTRE CLXXVII.

Goldbach à Euler.

Sommaire. Théorème de nombres.

St. Petersburg d. 10. Januar 1764.

(Dernière lettre).

P. S. In formula $PP + eQQ$, si sit $e = kk - (aa + bb)$, ubi k numerus rationalis, tota formula redigi poterit ad summam duorum quadratorum $aa + bb$, fiat enim

$$P = \frac{aa + bb - ak}{a - k}, \; Q = \frac{b}{a - k}.$$

Goldbach.