LETTRES

DE

JEAN BERNOULLI

(né le 27 juillet 1667, mort le 1 janvier 1748).

À

LÉONARD EULER

1728 — 1746.

Correspondance mathématique et physique, Tome II page 3.

Fac-similé de l'écriture de Jean Bernoulli 1741.

Viro Celeberrimo atq; Excellentissimo
Leonhardo Eulero
S.P.D.
Joh. Bernoulli

Jam duo elapsi sunt menses et amplius cum ad me perferrentur Litterae Tuae novissimae, quo ipso tempore in lecto decumbens misere laborans doloribus podagricis, chiragricis, ut et tussi asperrima, asthmate aliisq; symptomatibus, praesertim quadam paralysi, quae manum dextram ita corripuit ut per plures hebdomadas calamo ad scribendum uti non potuerim, imo ne nunc quidem possim expedite exarare litteras quas non tam scribo quam pingo ob vehementem manus tremorem, jam à longo tempore me infestantem atq; indies ingravescentem; talia sunt senectutis incommoda, à quibus curari posse nulla spes affulget. Sed ne Te molestem importunis meis querelis, festino, at lente! ad Litterarum Tuarum contenta:

Vix credideris Vir Excell. quanto me gaudio perfuderit elogium quo decorare voluisti meditationes meas hydraulicas, à Te enim laudari, qui omnium es perspicacissimus simul etiam judex integerrimus, potiori mihi duco honori quam si à mille aliis laudarer; inserviet mihi judicium Tuum, tanquam omni exceptione majus, contra quosvis cavillatores, sive sint invidi sive ignari; facile enim praecipio, non defuturos, praesertim in Anglia, qui more suo extenuabunt inventum non aliam ob causam quam quia debetur extraneo.

Lith. par A.Davignon.

LETTRE I.

Sommaire. Nomination de Hermann à la chaire d'Ethique à Bâle. — Recherches d'Euler sur le mouvement des eaux et la vitesse du son. — Expériences faites à St.-Pétersbourg sur la projection verticale des boulets de canon. Réflexions de Daniel et de Jean Bernoulli sur cette matière. — Mémoire de Fatio sur le centre d'oscillation et de percussion. — Valeur de la formule $y = (-1)^x$. — P. S. Rectification d'une erreur de Daniel dans le problème du mouvement des projectiles. — Mémoire *sur le mouvement*, envoyé par Jean Bernoulli. — Exhortation.

Doctissimo atque ingeniosissimo Viro Juveni
Leonhardo Eulero S. P. D. Joh. Bernoulli.

Pergratae fuerunt litterae Tuae Petropoli ad me datae die 5. Novembris st. v., quae me certiorem reddiderunt meam memoriam in Te nondum esse obliteratam neque temporis, neque loci longinquitate; si quid, ut agnoscis, in sublimiori mathesi a me profecisti, gaudeo, eoque magis, quod pro ea qua es ingenii felicitate, mirum in modum illud amplificas, quo spero futurum ut semina a me sparsa brevitempore in immenses abeant segetes, quid enim a fundi Tui fertilitate expectare non licet? Dedi 20. praeteriti mensis Decembris litteras ad filium meum Danielem, quas eum accepisse spero: significabam in illis electionem Celeb. Hermann*) ad professionem Ethices, atque monebam ut huic viro meo nomine ea de re gratularetur, quod factum fuisse non dubito; nunc idem ut repetas apud illum enixe Te rogo, cum plurima salute meis verbis illi denuncianda, non minus quam Filio meo. Gratias ago pro perscripta crisi iniqua et fastuosa quam H...**) noster de me meisque editis scriptis tam inhumaniter ad Te dixit. Dabitur occasio, eam illi pro merito exprobrandi, atque invidi hominis judicio opponendi judicium mihi perquam honorificum tot aliorum virorum in mathematicis et anatomicis celeberrimorum. Quae de motu aquarum effluentium ut et de velocitate soni memoras, digna utique sunt ut excolas. Nullus dubito quin si recte tractentur, omnia quae experientia monstrat ex Theoria mea virium vivarum deduci possint. Scripsit nuper Daniel meus facta fuissa experimenta, circa globos tormentarios in altum verticaliter explosos, eaque occasione communicavit quaedam a se commenta de modo supputandi tempora ascensus et descensus, habita ratione resistentiae aëris: Dicit inter alia se demonstrare posse globum verticaliter explosum, licet vi infinita, hoc est, cujus velocitas initialis infinita sit, impendere tamen tempus tantum finitum in totum ascensum absolvendum in aëre resistente; Ego vero ex eo tempore meditatus detexi methodum determinandi quaecunque circa hanc materiam desiderabat Filius. Notabo hic summatim tantum pro casu proposito principaliora, communicaturus methodum

*) Jacques Hermann, membre de l'Académie de St.-Pétersbourg, Auteur de la *Phoronomie* (Amsterdam 1716. 4°.), né à Bâle en 1678, † dans cette même ville en 1733.

**) Ce nom propre est illisible dans la lettre originale.

ipsam forsan proxima vice qua ad Danielem scribam. Esto globus ferreus, qualis Petropoli adhibitus fuit, habens diametrum 3 poll. seu $\frac{1}{4}$ ped. Paris. (assumo hic mensuram Paris. quia haec mihi nota est, non item anglica). Suppono aërem per omnes dimensiones uniformiter densum, cujus densitas se habeat ad densitatem ferri ut 1 ad 7000, quemadmodum Filius assumit (quamvis verius se habeat ut 1 ad 6000), suppono etiam aërem esse perfecte elasticum, cujus nempe minimae particulae, ceu globuli consideratae, potentissimo elaterio sint praeditae; aliter enim se res haberet, quam hic descripturus sum, si aër esset instar fluidi non elastici ut aquae, cujus nempe particulae post impulsum in corpora non resilirent sed tantum a sequentibus ad latera removerentur et postea praeterlaberentur. Suppono item quod calculus et experientia ab Hugenio instituta docet, corpus grave a quiete cadens in vacuo descendere primo minuto secundo per $15\frac{1}{12}$ ped. Paris. Ponamus jam exempl. gr. globum tanta vi sursum explodi ut in vacuo ascendere posset per 1000 ped. His ita praemissis dico sequentia: 1. Ad ascensum 1000 ped. in vacuo requiritur tempus $8\frac{1}{6}$ sec. est enim

$$\sqrt{15\tfrac{1}{12}} . \sqrt{1000} :: 1 . 8\tfrac{1}{6}$$

quam proxime. 2. Idem globus eadem vi explosus in aëre resistente ascendet ad altitudinem $587\frac{5}{8}$ ped. 3. Pro hoc ascensu in aëre requiruntur $5\frac{3}{4}$ sec. quam proxime. 4. Pro subsequente descensu insumuntur $6\frac{17}{24}$ sec. ita ut uno fere secundo citius ascendat quam descendat. 5. Hinc a momento explosionis ad momentum recidentiae globi elabentur $12\frac{83}{100}$ sec. in aëre, sed in vacuo $16\frac{1}{3}$ sec.; differentia est $3\frac{149}{300}$, seu proxime $3\frac{1}{2}$ sec. quibus in vacuo serius recidit quam in aëre. 6. Si globus noster careret pondere et suam tantum quantitatem materiae retineret, ille pergeret moveri in infinitum, sed ita retardaretur, ut post percursos pedes 4667 $l.n.$: 17371780 ipsi residua foret velocitas quae se haberet ad velocitatem initialem ut 1 ad n (per $l.n.$ intelligo logarithmum numeri n ex tabulis logarithm. sumendum). Hoc nihil aliud est quam casus particularis formulae illius generalis quam dedi in dissertatione mea de motu Cap. XII §. 13. 7. Tempus vero, quo globus noster non gravis percurreret hanc altitudinem, foret $= 228683 \times \overline{n-1} : 48000$ sec. 8. Velocitas maxima, ad quam globus descendens in aëre continuo vergit, et quidem data quavis quantitate propius, si in infinitum descender , se habet ad velocitatem initialem quacum exploditur ut 61 ad 80. Adeoque descendendo in aeternum primam suam velocitatem nunquam recuperabit globus. 9. Hinc velocitas illa, quae tempore infinito acquireretur in aëre, aequalis est illi, quam globus acquireret si in vacuo caderet ex altitudine $583\frac{5}{8}$ ped. h. e. uno tantum pede majore quam est ascensus in aëre quem quippe invenimus esse $582\frac{5}{8}$ ped. 10. Velocitas initialis est ad velocitatem finalem, quam nempe acquirit globus recidens ad eundem locum unde fuit explosus, ut 135 ad 82. Hinc velocitas finalis ad velocitatem maximam *ad quam non* ut 1312 ad 1645, h. e. proxime ut 4 ad 5.

Communica haec quaeso cum Daniele meo, ut conferat cum suis, dicasque ei Illustr. Comitem à Pergen desiderare, ut describi curet dissertationem illam gallicam de centro oscillationis et percussionis, quam olim Ill. Christophorus Fatio sub ductu et auspiciis meis conscripserat et cujus apographum mihi traditum mei filii Petropolim abeuntes secum deportarunt. Quando descripta erit, poterit Daniel alteruter exemplar commoda sed promta et tuta occasione ad me transmittere, alterum sibi retinere.

Quaeris de $y = (-1)^x$, quid illa sit? Ego sic statuo:

sit $y = (-n)^x$, erit $ly = xl(-n)$, adeoque $\frac{dy}{y} = dx\,l(-n)$. Est vero $l(-n) = l(+n)$, nam in genere

$$dl(-z) = \frac{-dz}{-z} = \frac{+dz}{+z} = dl(z)\text{, hinc } l(-z) = l(z);$$

adeoque $\frac{dy}{y} = dx\,l(+n)$, et integrando $ly = xln$, unde $y = n^x =$ (in casu quo $n = \pm 1$) $1^x = 1$. Ergo $y = 1$.

Caeterum novi anni auspicia, decursum ac finem cum multis aliis sequentibus ex animi sententia Tibi procedere voveo. Vale et fave. Dabam Basileae a. d. 9 Jan. 1728.

P. S. Filius meus credit globum in aëre sursum explosum vi licet infinita vel cujus velocitas initialis infinite sit magna, tamen nonnisi tempus finitum insumere in ascensum totalem, sed fallitur; invenio enim in hoc casu tempus ascensus esse etiam infinitum, quamvis (quod forsan illum fefellit) sit infinities minus, quam tempus ascensus in vacuo, si eadem illa velocitate initiali infinita exploderetur. Misi nuper per cursorem publicum specimen meum gallicum de Motu ad Clar. Schumacherum, Bibliothecarium vestrum, ab Illustri Academia vestra examinandum. Adventaverit fortassis ante has litteras. Spero te alere pacem et concordiam cum Filio meo, ita enim ambo excitabitis admirationem vestri apud minus exercitatos in profundiori mathesi: praeter quam quod hoc suadeat obligatio erga Filium qui unicus Petropolim te protraxit.

LETTRE II.

Sommaire. *Sur la théorie de la musique d'Euler. Critique des principes de cette théorie.*

Clarissime et Doctissime Domine Professor,
Amice Carissime.

Dessen letzteres vom 25. Mai ist mir von Seinem Herrn Vatter zurecht überlieffert worden; Er hat nicht nöthig sich wegen Saumseligkeit im Schreiben zu excusiren, da ich selbsten eine Antwort schuldig wäre: hoffe aber Er werde mir zu gut halten, was ich dissorts an meiner Pflicht etwas lasse abgehen, in Betrachtung meiner vielfältigen Occupationen, sonderlich bei dem mir neulich aufgetragenen, oder vielmehr aufgedrungenen Decanat, welches mir in meinem angehenden hohen Alter sehr beschwerlich ist.

Es ist mir sehr lieb gewesen zu vernehmen, dass der Herr Prof. an Verfertigung eines Systematis Musici (welches fast zu Ende soll gekommen seyn) arbeitet*); ich zweifle nicht, es werde ein schönes Werk zu Tage kommen, so des Auctors fürtreffliches ingenium sattsam zeigen wird; Ich kann mir leicht einbilden, dass dergleichen opus kaum wird gefunden werden, darin alles auss mathematischen Gründen hergeholet ist, da wenig Scriptores Musici oder wohl gar keine zu finden sind, welche mit so grosser und aussbündiger mathematischer Wissenschaft begaabet sind, wie der Hr. Professor ist, desswegen mich sehr verlanget Sein Werk selbsten dermahleneins zu sehen. Ich könnte zwar nicht leicht errathen, worin derjenige Grundsatz bestehe, so metaphysisch seyn solle, wie Er sagt, dadurch die Ursach könnte gegeben werden, warum Einer an einer Music ein Wohlgefallen haben könne, und dass uns eine Sach angenehm, eine andere aber unangenehm vorkomme: Man hat zwar eine General-idée von der Harmonie, dass sie lieblich ist, wenn sie wohl eingerichtet und die Consonanzen wohl menagirt seind, denn, wie bekandt, so haben auch die Dissonanzen in der Music ihren Gebrauch, damit die Lieblichkeit der gleich darauf folgenden Consonanzen desto besser herauskomme, nach dem gemeinen Sprichwort: opposita juxta se posita magis elucescunt; also verhält sich es auch mit dem Schatten in der Malereykunst, welcher das Licht releviren muss. Es kommt, glaub ich, in musica practica meistens auf die Art und Modification an, daran man gewöhnet ist, und diese Art dependiret viel von dem Naturel und Temperament der Leute, deren einige dieses, andere ein anderes für süss und angenehm halten; also ist die Italienische Music-

*) L'ouvrage: Tentamen novae theoriae Musicae, ex certissimis harmoniae principiis dilucide expositae (un vol. in 4.), parut à St.-Pétersbourg en 1739.

Art discrepant von der Französischen, und diese von der Englischen. Mit einem Wort, de gustibus non est disputandum. Wenn hiemit die Lieblichkeit eines Musicstückes in der Natur selbsten soll gegründet seyn, so muss man wohl definiren, was man durch Lieblichkeit verstehe und nicht sagen: dies oder jenes ist lieblich, weil es mir gefällt, denn eben dieses könnte einem andern missfallen, zum Exempel dem Midae hat des Pans Schnader-Music besser gefallen, als des Appollinis Harfenklang. Der Hr. Professor sagt, man könne urtheilen von dem Wohlgefallen oder Missfallen der viel zusammengefügten Töne, wenn man die Verhältniss der Höhe und Tiefe derselben, nämlich die rationem intervallorum pulsuum, welche die Saiten geben, ansiehet; daraus habe Er die Regeln gezogen, wie die Töne müssen zusammengefügt werden, dass sie ein verständiges Ohr belustigen können. Dieses lasse ich gelten für einen Meister, der mehr auf die Accuratesse eines Musicstückes Achtung gibt, als auf den Effect, den es auf die Zuhörer thut; ein Solcher wird sich ohne Zweifel daran ergötzen und belustigen, wenn er es nur auf dem Papier geschrieben siehet und examiniret, und befindet dass es nach den Grundregln wohl componirt ist; aber da ein Musicstück meistens gespielet wird vor unverständigen Ohren, welche die rationem intervallorum pulsuum der Saiten nicht einsehen, viel weniger zählen können, so wird, glaube ich, dergleichen Ohren das Musicstück entweder gefallen oder missfallen, je nachdem sie an diese oder jene Gattung der Music gewöhnt sind. Im übrigen gefället mir sein dessein ganz wohl, weilen aufs wenigste die Theoria musices dadurch perfectionniret und gewiesen wird, dass ein Mathematicus schier alle Wissenschaften auszuführen im Stande ist, dahingegen andere Meister, die nur Practici seind von ihrer eignen Kunst nicht anderst schreiben als wie ein Blinder von der Farb.

Wenn dieser Tractatus Musices zu End seyn wird, wird der Hr. Professor seine vorhabende Mechanicam*) (von deren mir ist geschrieben worden) ohne Zweifel mit Ernst für die Hand nehmen, von deren ich mir etwas Sonderbares promittire, darzu ich denn beharrliche Gesundheit von Herzen anwünsche. Verbleibe indessen unter Empfehlung Göttl. Protection des hochgeehrten Hrn. Professors

bereitwilligster J. Bernoulli Dr.

Basel, d. 11. August 1731.

*) Cet ouvrage parut déjà en 1736 sous le titre: Mechanica sive motus scientia analytice exposita, 2 vol. in 4.

LETTRE III.

Sommaire. Envoi du mémoire de Jean Bernoulli II*) *Sur la propagation de la lumière.* — Jugement d'Euler sur les pièces de Jean et de Daniel, relatives aux déclinaisons des orbites planétaires. La publication de la Mécanique d'Euler est attendue avec impatience; la haute idée que s'en forme J. B. — Le principe des forces vives, contesté par les Anglais. — Polémique à ce sujet entre Jurin et J. B. dans les Actes de Leipzig. — Sommation des séries des puissances réciproques paires des nombres naturels.

Viro Clarissimo ac Mathematico longe acutissimo
Leonhardo Eulero S. P. D. Joh. Bernoulli.

Annus propemodum est quod postremas Tuas litteras accepi; ne credas quaeso, diuturni silentii causam fuisse aliquam animi mei alienationem, nosti enim et fateris ipse, quot quantaque Tibi olim dederim benevolentiae testimonia, ut plane non sit, cur ullam in me erga Te suspiceris mutationem: Vera potius dilationis causa est partim locorum longinquitas, partim sumtus erogandi in litteras mittendas et

---

*) Troisième fils de Jean, né le 18 mai 1710, † le 17 juillet 1790.

accipiendas per cursorem publicum. Utor itaque hac occasione commoda, qua citra sumtus ad Te amandare possim dissertationem filii mei Johannis de propagatione Luminis, condecoratam praemio superioris anni ab Academia regia Parisina, de qua, postquam eam perlegeris, judicium Tuum (quod ferre soles ex animi sententia) praestolabimur. Vidi quae perscripsisti filio meo Danieli de utriusque nostrûm dissertationibus super declinationibus orbitarum planetariarum*), id quod judicas de Danielis opere, videri scilicet deproperatum fuisse summa cum festinatione, idem et mihi visum fuerat, quod etiam statim ipsi exprobraveram. Si dicere licet quod sentio, credo ipsum ad optatum finem non perventurum fuisse, nisi paucis mensibus ante praemiorum distributionem reditum suum ex Moscovia per Lutetiam sumsisset, ubi occasionem invenit prensandi quorundam benevolentiam aut aliquid aliud moliendi, sicuti Tu ipse festive jocaris, quando dicis, in dissertatione Danielis hoc unum praecipue laude dignum reperiri, quod praemium reportaverit. In solidiorem mihi vergit gloriam honorifica quam fers sententia de mea dissertatione, *eam nempe elaboratam esse magna diligentia atque insigni ingenio*; quod vero addis Te dubitare an ipse credam, quaestionem per Theoriam meam plenarie solutam esse; ad hoc respondeo a nemine exigi posse, ut in rebus mere physicis promittat solutiones omni exceptione majores atque ad rigorem geometricum demonstrabiles; sufficit si secundum principia clara et semel stabilita ratiocinando recte procedat: Certe non puto, Cartesium vel Newtonum, vel alium quemvis ex Philosophis, qui systema physicum condidit, ausum fuisse vitam aut animam suam oppignerare pro

*) v. Histoire génér. des mathém p. Bossut T. II pag. 367 etc.

systematis sui exacta convenientia cum rerum existentia ..... Accepi a Filio, novam Mechanicam a Te parari ejusque tomum primum jamjam e prelo evasisse, id quod intelligere summo me gaudio afficit, spero namque me in hoc opere visurum multa singularia ex sagacissimi Tui ingenii promtuario depromta atque ab aliis Mechanicae Scriptoribus intacta; a Tuo quippe mentis acumine, quod ad profundissima penetrat naturae mysteria, nihil non novi, nihil non limatissimi mihi promitto: facile sane provideo Te non haerere tantum in explicandis vulgaribus istis et trivialibus Staticae legibus atque machinarum viribus ab aliis dudum occupatis; dabis operam haud dubie, ut sublimior Mechanicae pars, quae est Dynamica, hactenus segniter admodum tractata, a Te in plena sua luce prodeat, ubi praesertim ansam habebis naturam virium vivarum ita penitus excutiendi, ut nullus vel pertinacissimis adversariis relinquatur locus, quo suis cavillationibus ex invidia an imperitia an ex utraque identidem nobis obtrusis veram earum virium aestimationem arrodere non desinunt, id quidem ego nunc obtinui meis demonstrationibus, in dissertatione mea de motu tum et alibi expositis, ut nunc in Gallia passim veritas triumphet, sed Anglis usque adeo adhuc stomachum movet (ex livore credo contra Leibnitium, primum virium vivarum assertorem) ut cum unum alterumve ad silentium redactum atque e medio sublatum esse putamus, statim duo tresve alii prorumpant vehementius declamantes, non secus ac esset in Anglia Hydra Lernaea ad quam domandam Te tanquam Hercule opus erit. Jurinus imprimis, ut in Act. Lips. legi, horribilem strepitum excitat contra virium vivarum Patronos, sed insulsis adeo atque jejunis argumentis utitur, ut commiserationem potius quam indignationem commoveat: lepidum fuit vidisse in Actis

Lips. 1735. m. Majo recensionem quarundam dissertationum Jurini in quarum ultima inepte debacchatur contra vivium vivarum Defensores et nominatim quidem contra me, sed cui recensioni immediate subjecta est mea aliqua Dissertatio *De vera notione virium vivarum earumque usu in Dynamicis,* quasi eam dedita opera scripsissem in refutationem praecedentis dissertationis Jurinianae, etiamsi revera mihi nondum innotuerit a Jurino quicquam ea de re scriptum fuisse.

Percepi porro te invenisse modum summandi seriem fractionum $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+$ etc. h. e. $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+$ etc. cujus nempe denominatores procedunt ut quadrata numerorum naturalium 1, 2, 3, 4, etc. id quod olim fratri meo Jacobo imperscrutabile fuit, sicuti ipse fatetur in Tractatu suo de seriebus infinitis p. 254; invenisti namque summam illius seriei $= \frac{cc}{6}$, nominando scilicet diametrum circuli $= 1$, ejusque circumferentiam $= c$; volebat meus Daniel fontem ejus indagare, sed irrito successu, quanquam in postremis Tuis litteris ad ipsum aliquid ni fallor de fundamento ei aperueris, cum primum vero mihi nominasset summam a Te inventam $\frac{cc}{6}$, praetereaque nihil, indeque ego intellexissem summam seriei reduci ad quadraturam circuli, curiosus unde petenda esset analysis, mox ipse proprio meo Marte totum detexi mysterium, in subsidium vocato elegantissimo aliquo theoremate Newtoni, quod sine demonstratione extat in ejus Algebra p. 251 edit. Lond. an. 1707, cujus autem demonstrationem etiam ego inveni, ubi traditus modus, quo ex coëfficientibus terminorum datae alicujus aequationis determinatur summa non tantum radicum, sed et ex radicibus summa quadratorum, cuborum, quadrato-quadratorum, etc. Ut itaque judicare possis an rem acu tetigerim, exprimam hic summas serierum ubi denominatores progrediuntur ut potentiae quartae, tum etiam ut potentiae sextae numerorum naturalium 2, 3, 4, 5, etc. Inveni enim (instituendo pro singulis novum calculum) $1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \text{etc.} = \frac{c^4}{90}$, item $1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \text{etc.} = \frac{c^6}{940}$. ex istis porro elicietur summa $1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \text{etc.}$ atque ita successive progredi licebit ad altiores dimensiones. Sed calculus gradatim fit operosior, extenditurque tantum ad exponentes dimensionum pares; quod si vero sint impares, fateor me quaesiti nondum esse compotem. Si quem possideas modum pro imparibus, ex. gr. pro hac serie summanda $1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \text{etc.}$ gratum erit a Te edoceri. Caeterum scrupulus aliquis subest in hoc negotio ex eo oriundus, quod pro hypothesi assumitur ex coëfficientibus terminorum alicujus aequationis, etiam infinitae, dependere radicum determinationem, id quod quidem in genere verissimum est, sed saepissime accidit ut in aequatione proposita lateant praeter radices utiles (quae problema solvunt) etiam inutiles seu peregrinae, imo quoque impossibiles seu imaginariae: Adeoque in hac aequatione ad quam pervenitur $e - x + \frac{x^3}{2.3} - \frac{x^5}{2.3.4.5} + \frac{x^7}{2.3\ldots7} - \text{etc.} = 0$ ubi x denotat arcum circuli incognitum sinui dato e respondentem, demonstrandum esset nullam contineri radicem impossibilem, nullamque aliam, quam quae revera alicui ex infinitis arcubus ad sinum e pertinentibus respondeat; Habeo quidem in hoc casu aliquam demonstrationis speciem, quae mihi rem utcunque probabilem reddit: alias innumera possem afferre exempla, in quibus ita ratiocinando ad manifestam absurditatem delaberemur, ut si posito radio circuli $= 1$, arcu quodam dato a, tangente incognita $= t$, nosti utique hanc haberi aequationem $a = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 + \text{etc.}$ adeoque $a - t + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{7}t^7 - \text{etc.} = 0$; haec ergo aequatio infinitas radices t habebit, ex illis tamen omnibus unica tantum satisfacere ipsique arcui a respondere potest. Sed Te diutius detinere nolo. Vale, Vir Clarissime, et me quod facis amare perge. Dabam Basileae a. d. 2 April 1737.

LETTRE IV.

Sommaire. J. B. envoie la première partie de ses Recherches hydrauliques. Exposé de sa méthode qu'il nomme *directe*, et des avantages qu'elle offre sur celle employée par Daniel, dans son Hydrodynamique. — Contenu de la seconde partie de ces mêmes recherches. — J. B. excuse l'insuffisance de son mémoire *De motu corporum in orbitis mobilibus.* — Travaux d'Euler sur la théorie de la musique et sur le mouvement des corps flottans. — Conditions du repos ou de l'équilibre des corps, et application de ces conditions aux corps flottans. — Sur les oscillations verticales et leur application à la recherche du poids des vaisseaux. — Problème des isopérimètres. — Recherches d'Euler sur la courbe élastique rectangulaire et autres. — Plainte sur sa situation à Bâle.

Viro Excellentissimo atque Acutissimo Leonhardo Eulero S. P. D. Joh. Bernoulli.

Exoptatissimae Tuae litterae d. 20. Decembris st. v. mihi traditae sunt atque a me perlectae summa cum voluptate. Ecce! nunc ad Te mitto partem priorem meditationum mearum hydraulicarum*), quas tantopere Te desiderare testa-

---

*) Dissertatio hydraulica de motu aquarum per vasa aut per canales, quamcumque figuram habentes, fluentium. Comment. Petrop. IX p. 3 — 49.

ris, et vel ideo desideras, quod cognoveris imperfectionem, qua haec doctrina etiamnunc ab aliis tractari soleat, immo, ut candide fateris, Tu ipse frustra omne studium in genuina methodo detegenda collocaveris, invita omni, qua polles, perspicacia. Videbis, originem sequioris successus Scriptorum hydraulicorum ex eo unice venisse, quod nemo hactenus attenderit, partem aliquam finitam virium prementium insumi ad formandum gurgitem, quando aqua cogitur ex uno tubo in alium diversae amplitudinis transire, licet gurges ipse constare concipiatur ex portiuncula aquae infinite parva. Post pertinacem diutinamque pensitationem animadverti tandem, non sufficere, ut attendatur ad solam illam vim seu pressionem, qua liquor in tubis in motum localem seu progressivum excitetur data cum velocitate, sed praeterea in considerationem trahi debere principium *Continuitatis,* quo fit ut nulla mutatio in effectibus producendis fiat per saltum, sed successive per gradus infinite parvos, ut in hoc negotio accidit, ubi liquor a velocitate minori ad majorem, vel vicissim a majori ad minorem transire debet; unde omnino necesse est, ut prope transitum, vel ante vel post, concipiatur aliqua portiuncula liquoris, quantumvis parva, cujus stratula infinite parva vel accelerando vel retardando procedant, atque haec portiuncula, inaequabili velocitate gaudens, in stratulis est, quam voco gurgitem: haec omnia uberius et clarius ex ipso scripto intelliges.

Videbis etiam methodum hanc directam mirifice conspirare cum indirecta (qua sola usus est Filius meus in sua Hydrodynamica) etenim ambae dant eandem solutionem problematum hydraulicorum. Posset autem aliquis mirari, cur, qui ista solvere vult per theoriam virium vivarum, non pariter teneatur rationem habere formandi gurgitis, utpote

*

qui videatur requirere ad sui generationem aliquam partem virium vivarum, aeque ac requiritur partem virium mortuarum; sed causam discriminis explico in scripto meo, monstrans, quantitatem materiae quae componit gurgitem, etsi sit infinite parva, nihilominus opus habere vi finita et determinata pressionis ad acquirendam accelerationem vel retardationem in stratulis, sive ad id, ut sese gradatim accommodet ad motum quem liquor jam habet in tubo, in quem ingredi debet. At vero vim vivam quae est in omni materia gurgitis, quippe quae quantitatis est infinite parvae et tantum finitam celeritatem in singulis stratulis habens, oppido patet fore illam vim vivam gurgitis infinite parvam ideoque prorsus incomparabilem cum totali vi viva totius massae aqueae in tubis motae. Hoc ergo notari debuisset a Filio, antequam aggrederetur tractationem Hydraulicae per theoriam conservationis virium vivarum, ne quis scrupulum habere possit, videns negligi considerationem gurgitis, quae in methodo directa citra paralogismum negligi non potest; sed quomodo potuisset hoc praecavere, cum nequidem ideam habuerit naturae gurgitis, quotempore librum suum scripsit.

Vides, Vir Clariss., figuras rudi admodum et crassa Minerva esse delineatas, sine ullo ornamento, nedum ad Stereographiae regulas repraesentatas, id sane efficere non potui, si vel maxime voluissem, ob tremorem manuum mearum qui cum aetate continuo ingravescit. Fortassis dabitur apud Vos aliquis amanuensis qui, Te dirigente, figuras elegantius et majore cum gratia delineare poterit, ita ut ad mentem meam respondeant.

Ceterum si videro, primam hanc partem hydraulicae meae exercitationis Tibi non displicuisse, transmittam protinus alteram partem, quam interea temporis, dum responsio

Tua ad me venerit, absolvam, ut ad mittendum sit parata: Deprehendes, illam adhuc magis esse curiosam, dum ita modifico theoriam meam, ut fere opus non sit idea gurgitis, quem sub alia notione involvo; unde nascitur novum principium hydraulicum, a nemine antea animadversum, cujus auxilio statim pervenio ad motum aquae determinandum fluentis per vasa vel canales, non tantum ex tubis cylindricis conflatos, sed quamcunque figuram, etiam irregularem habentes, aliaque explico phaenomena jucunda et utilia, quae in Physicis quoque suum usum habebunt. — — —

Vides, Vir Celeb., post tot scriptorum expeditionem parum temporis mihi superesse ad excutienda pro merito singula epistolae Tuae capita; attingam tamen tumultuarie quae tum permittit mentis distractio, oculorum hebetudo, atque imprimis manuum lassitudo et tremor. Quod in conventu Vestro praelegeris solutionem meam succinctam problematis de motu corporum in orbitis mobilibus*), gratias ago, quamvis eam non scripserim ut publice proponeretur, alias majori eam cura elaborassem atque extendissem magis. Dabitur forsan occasio alia vice communicandi quae mihi sunt meditata alia circa hanc materiam, et praesertim quae mihi subnata sunt ex lectione Newtonianorum non semper recte se habentium. Gratum erit accipere tomos, quos promittis, Commentariorum, quae post quartum mihi desunt.

In Musicis non valde sum exercitatus, neque hujus scientiae fundamenta satis mihi sunt perspecta, ut de inventis Tuis judicare queam. Videntur sane egregiae, quae in litteris Tuis obiter tantum attingis; sed cum videro ipsum

*) Compendium analyseos pro inventione vis centralis in orbibus mobilibus planetarum. Comment. Acad. Petrop. X. p. 95 — 100.

tractatum Tuum, quam de harmoniae principiis edere statuisti, spero fore ut exinde lux clarior mihi affulgeat ad inventorum Tuorum praestantiam penitius introspiciendam. Eandem ob causam nolo nunc diutius inhaerere iis, quae hactenus inter nos agitata sunt de situ et motu corporum aquae innatantium antequam visus mihi sit Tuus hac de re tractatulus, quem ad finem perductum esse ais. Interim bene est quod nunc agnoscas veritatem nonnullorum, quae monueram tam de situ obliquo coni et conoidis parabolici, quam de modo multiplicandi corporis particulas per quadrata distantiarum, non a centro ejus gravitatis, sed ab axe horizontali, per centrum transeunte, circa quem fiunt oscillationes. Corpus aliquod tribus utique modis in quiete vel aequilibrio conservatur: 1°) Si corpus duabus viribus aequalibus sed oppositis et ad se invicem tendentibus sollicitatur, fiet aequilibrium, quod olim in alia occasione vocavi *coactum*, idque est quod nunc vocas *firmum*. 2°) Quodsi vires illae duae aequales et oppositae a se invicem tendunt, hoc est, quae corpus non premunt, sed trahere conantur, fiet iterum aequilibrium, quod a Te vocatur *infirmum*, mihi vero pro scopo, quem olim tunc habueram, illud aequilibrium iterum vocabatur *coactum*. 3°) Si nullis omnino viribus oppositis corpus sollicitatur, nec premendo ad se invicem nec trahendo a se invicem, erit utique aequilibrium, quod a me dicebatur *otiosum*, ideo quia, si tale corpus a causa aliqua externa ex situ suo tantisper disturbatur, non amplius affectabit ad pristinum suum situm redire. Sic ex. gr. corpus sphaericum et homogeneum aquae insidens ac quiescens, si nonnihil circa centrum suum rotetur, manebit in hoc novo situ et non repetet priorem. Patet autem tale aequilibrium nec firmum esse nec infirmum, quodque ideo commode vocavi *otiosum*, quia est quasi in statu indifferentiae. Utrum vero corpus aquae insidens et quiescens sit in aequilibrio firmo vel infirmo, ex hoc utique cognoscitur, si nimirum nonnihil ex situ aequilibrii inclinetur, et ita quidem ut pars immersa idem semper volumen in aqua occupet, tunc centrum gravitatis corporis vel ascendisse in recta verticali, vel descendisse observabitur; si prius, concludendum erit corpus esse in aequlibrio firmo; si posterius, erit aequilibrium infirmum; si neque ascendit neque descendit, erit in statu neutro, seu indifferentiae, quod, ut dixi, mihi vocatur aequilibrium otiosum. In casu firmitatis attendendum est, quantum ex assumta inclinatione centrum gravitatis ascendat, tum enim ex utriusque collatione calculari potest lex accelerationis oscillationum corporis, atque inde determinari longitudo penduli isochroni. Sufficit theoriam ac fundamentum detexisse, calculum instituere non vacat tot aliis laboribus et negotiis distracto. De caetero gratissimum mihi fuit intelligere, quod ad admirationem usque Tibi placuerint, quae scripsi de oscillationibus verticalibus, propter simplicitatem expressionis et insignem usum quem praestare possunt in explorandis navium ponderibus; maluissem autem ut ipse quoque calculum fecisses ex Tuo ingenio, quo mihi patuisset, annon erraverim in ratiocinando, nam ingenue fateor, me Tuis luminibus plus fidere quam meis.

Quae nunc uberius affers, Vir Exc., de Isoperimetricis, credo equidem, Te omnia probe ruminasse atque ad veritatis trutinam expendisse, ita ut vix quicquam restet, quod acerrimam Tuam sagacitatem subterfugere potuerit; ad me quod attinet, diu adeo est quod haec seposui, ut mihi ea plane non amplius sint praesentia, quare ab his desisto.

Lectu jucundissimum fuit, quod addis in fine litterarum Tuarum de proprietate Tibi observata circa Elasticam rectangulam (vel etiam Lintheariam, ambae enim eandem faciunt curvam) in qua si abscissa ponatur x, est applicata $= \int \frac{xxdx}{\sqrt{(a^4-x^4)}}$ et longitudo curvae $= \int \frac{aadx}{\sqrt{(a^4-x^4)}}$, quas expressiones ita comparatas dicis, ut inter se comparari nequeant. At invenisti si abscissa ponatur $= a$, rectangulum sub applicata et arcu comprehensum aequale esse areae circuli, cujus diameter sit abscissa $= a$. Est utique haec observatio notatu dignissima, *sed vellem scire*, an hanc proprietatem a priori et de industria quaesiveris et inveneris, aut an illam, ut saepe accidere solet, aliud quaerendo detexeris per casum fortuitum. Ego jam olim observavi circa has lineas duas aliquam proprietatem, etsi inventu faciliorem, quae in hoc consistit, quod earum, non quidem rectangulum, sed summa sit aequalis quadranti circumferentiae ellipseos, cujus axis minor $= 2\,a$ et axis major $= 2\,a\sqrt{2}$. Vid. Act. Lips. 1694. m. Octob. Hoc autem valet non tantum de tota curva cujus abscissa $x = a$ ejusque applicata maxima, sed indefinite de quibuscunque partibus earum ad se invicem spectantibus, quarum utique summa semper aequalis est arcui elliptico qui pro abscissa habet x in axe minori a centro sumtam, a cujus arcus longitudine etiam dependere demonstravi loco citato dimensionem arcus Lemniscatae curvae, quam adhibui ad construendam Isochronam paracentricam Leibnitii, quae tum temporis multum rumoris excitaverat. Quando autem affirmas applicatam $\int \frac{xxdx}{\sqrt{(a^4-x^4)}}$ et longitudinem curvae $\int \frac{aadx}{\sqrt{(a^4-x^4)}}$ ita esse comparatas, ut inter se comparari nequeant, nescio an hoc intellectum velis generaliter et sine ulla exceptione; an vero non putes posse quidem comparari pro aliqua x determinatae longitudinis, sed non indefinite pro singulis x, sicuti revera datur aliqua hujusmodi expressio, nempe haec: $\int \frac{x^4 dx}{aa\sqrt{(a^4 - x^4)}}$, quam in casu $x = a$ inveni aequalem esse trienti curvae totius, adeo ut habeatur

$$\int \frac{aadx}{\sqrt{(a^4 - x^4)}} = 3 \int \frac{x^4 dx}{aa\sqrt{(a^4 - x^4)}}.$$

Optarim ut ad hoc investigandum aliquid temporis colloces, siquidem non minus notatu dignum videtur, quod Tuum illud alterum: $\int \frac{xxdx}{\sqrt{(a^4 - x^4)}} \cdot \int \frac{aadx}{\sqrt{(a^4 - x^4)}} =$ circulo.

Quod supra scripsi his verbis: *sed vellem scire* etc., id nunc didici ex litteris Tuis ad filium Danielem datis, quas mihi legendas exhibuit, postquam totam meam epistolam hucusque jam absolvissem.

Curiosa sunt theoremata in illis Tuis litteris contenta: ego jam olim similia inveni, sed mea magis geometrica sunt, ex consideratione curvarum deducta, Tua vero analytica magis, ope calculorum eruta. Combinando haec nostra in corpus commune, poterimus doctrinam de curvis inter se comparandis mirum quantum augere.

Quod denique doleas frequens damnum ex tot iteratis decoctionibus mercatorum mihi illatum, facis quidem, quod Christiana inculcat charitas, idque mihi solaminis loco erit, sed cum cogito, me hic Basileae esse, ubi perpetuis vexationibus fortunae obnoxius sum, ubi omni mea scientia vix minimam jacturae partem reparare possim, dum alibi honoribus et bonorum copia abundare potuissem, parum abest, quin tandem animum despondeam atque scientiarum culturae, quoad vixero, valedicam.

Valeas vero et Tu, Vir Excell., diutissime, mihique favere perge. Dabam Basileae a. d. 7. Mart. 1739.

LETTRE V.

Sommaire. Causes qui ont retardé l'envoi de la seconde partie des Recherches hydrauliques. — Impatience de voir le traité de Musique. — Sommation de la série $\frac{1}{1 \pm n} + \frac{1}{4 \pm n} + \frac{1}{9 \pm n}$ etc. — Renvoi à des problèmes analogues résolus par Jacques B. — Intégration des équations différentielles des degrés supérieurs. — Recherches sur la longueur du pendule isochrone. — Descente extraordinaire du mercure dans le baromètre.

Viro Celeberrimo atque longe Eximio Leonhardo Eulero S. P. D. Joh. Bernoulli.

Jam per aliquot menses valetudine usus minus prospera, ut mihi fieri solet hac imprimis anni tempestate, ac subinde lecto affixus ob insultus podagricos, promtius respondere non potui ad litteras Tuas novissimas multa eruditione refertas; quam ipsam ob causam ne nunc quidem adhuc transmittere possum secundam partem meditationum mearum hydraulicarum, utpote nondum omnino descriptam, etiamsi materiam a longo jam tempore in parato habeam: Adde quod multo copiosior erit haec altera pars atque sui triente superabit primam, unde facile intelliges describendi laborem non posse non esse mihi molestissimum, cum ob hebetudinem oculorum tum ob tremorem manuum, quae duo sunt mala quotidie fere ingravescentia; quodque pessimum accidit hac in re est, quod ipse cogor describere, cum nullus mihi detur amanuensis, qui talia describere velit vel possit. — — —

Filius meus professor Lipsiam misit chirographum Exc. Schumacheri ad repetenda exemplaria Commentariorum Tuique tractatus de Musica, pro quo debitas Tibi gratias ago, quem, ubi accepero, legem magna cum voluptate, et eo majore quidem, quod de hac materia hactenus nihil mihi videre contigit, quod mihi ex asse satisfacere potuerit.

Methodus, qua uteris, Vir Exc., ad summandam seriem $\frac{1}{1\pm n}+\frac{1}{4\pm n}+\frac{1}{9\pm n}+$ etc. est omnino curiosa et extraordinaria, sed simul postulans calculum longum et intricatum, a cujusmodi instituendis jam a multo tempore absterreor, ob senectutis incommoda superius memorata, contentus iis, quae sola vi meditationum, sine longa analysi, eruere possum. Daretur forsan, si velles sagacitatem Tuam consuetam consulere, alia via brevior magisque trita idem praestandi; sunt enim infiniti casus jam dudum soluti, nimirum omnes illi, quos olim communi opera cum Fratre meo defuncto tractavimus, in quibus Tuum n significat numerum quadratum cum praefixo signo —; Aperi modo, si habes, tractatulum posthumum Fratris mei de arte conjectandi, ubi pag. 252 reperies hoc problema solutum: *Invenire summam serierum Leibnitianarum aliarumque, quarum denominatores sunt numeri quadrati aut trigonales, minuti aliis quadratis vel trigonalibus.* Exemplum habetur pag. 252 hujus seriei:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\frac{1}{35}+\text{ etc.},$$

hoc est hujus: $\frac{1}{4-1}+\frac{1}{9-1}+\frac{1}{16-1}+\frac{1}{25-1}+$ etc. quae est $=\frac{3}{4}$. Item pag. seq. 254 hoc exemplum habetur: $\frac{1}{7}+\frac{1}{16}+\frac{1}{27}+\frac{1}{40}+$ etc. seu $\frac{1}{16-9}+\frac{1}{25-9}+\frac{1}{36-9}+\frac{1}{49-9}+$ etc. quae series est $=\frac{49}{120}$. Tuum est examinare, an Tua sublimia cum hisce trivialibus quadrent.

Non minus quoque curiosus videtur modus Tuus aequationes differentiales altiorum graduum una vice ita integrandi, ut statim ad signationem finitam perveniatur. Memini me jam ante multos annos simile quid invenisse, quod in adversariis meis consignavi, sed nunc inquirere non vacat. Ex paucis quae in hanc rem adumbrationis causa adjicis sine demonstratione, concludo fere, Tibi ad has meditationes occasionem praebuisse ea, quae olim publice dedi pro solutione problematis Cotesiani a Tayloro propositi omnibus geometris non Anglis, ubi modum tradidi, resolvendi quantitates integrandas in factores reales, eosque discernendi a non realibus: Quod vero attinet ad generalem Tuam formulam:

$$y+\frac{a\,dy}{dx}+\frac{b\,ddy}{dx^2}+\frac{c\,d^3y}{dx^3}+\frac{d\,d^4y}{dx^4}+\text{etc.}=0,$$

posita dx pro constante, huic quidem satisfacere potest semper aliqua ex curvis logarithmicis, cujus tantum subtangens est quaerenda, quod ita facio: Aequatio generalis pro istis curvis haec est: $y=n^{x:p}$, ubi p denotat subtangentem generalis Logarithmicae, et n numerum, cujus logarithmus $=$ unitati, ita ut $ln=1$. Hoc ita exprimendi morem primus ego introduxi jam ante exitum superioris saeculi, id quod nunc magnum usum habere compertum est. Differentiando ergo continuo $n^{x:p}$ habebuntur valores ipsarum dy, ddy, d^3y, d^4y, etc. nimirum: $dy=\frac{dx}{p}\cdot n^{x:p}$, $ddy=\frac{dx^a}{pp}\cdot n^{x:p}$,

$d^3y = \frac{dx^3}{p^3} \cdot n^{x:p}$, $d^4y = \frac{dx^4}{p^4} \cdot n^{x:p}$, etc. Quibus valoribus substitutis in formula Tua $y + \frac{a\,dy}{dx} + \frac{b\,ddy}{dx^2} +$ etc. mutabitur illa in hanc: $n^{\frac{x}{p}}\left(1 + \frac{a}{p} + \frac{b}{p^2} + \frac{c}{p^3} + \frac{d}{p^4} + \text{etc.}\right) = 0$. Diviso itaque per $n^{x:p}$ et multiplicato per maximam dimensionem ipsius p, orietur aequatio algebraica, cujus quaelibet radix p dabit subtangentem Logarithmicae quaesitae. Exemplum quod das aequationis differentialis quarti gradus

$$y\,dx^4 = k^4 d^4 y, \text{ seu } y - \frac{k^4 d^4 y}{dx^4} = 0$$

ita facillime solvitur. Cum enim hic litterae a, b, c deficiant atque sit $d = -k^4$, habebis hanc aequationem quatuor dimensionum, sed non affectam, $p^4 - k^4 = 0$ seu $p = k$. Dico igitur, logarithmicam, cujus subtangens $= k$, satisfacere aequationi propositae $y - \frac{k^4 d^4 y}{dx^4} = 0$. Fateor interim hoc modo pro hoc exemplo unam tantum exhiberi logarithmicam, a Te vero exhibentur plures curvae

$$y = Ce^{-\frac{x}{k}} + De^{\frac{x}{k}} + E \sin A\frac{x}{k} + F \cos A\frac{x}{k}.$$

Fateor etiam, si proponeretur $y + \frac{k^4 d^4 y}{dx^4} = 0$, fore meam logarithmicam impossiblem seu imaginariam; sed idem etiam in Tua solutione, licet universaliore, contingeret, nam apud Te foret pariter k impossible, seu non reale.

Cum nuper mihi aliquantulum plus otii nacto in mentem rediret id quod scripseras de oscillationibus corporum in aqua natantium, volebam per me ipsum inquirere in longitudinem penduli isochroni oscillationibus quas subeunt hujusmodi corpora in aqua natantia, postquam ex statu quietis nonnihil deturbata fuerunt per vim, cujus directio est horizontalis: Post aliquot horarum meditationem compos factus sum perfectae solutionis, ut mihi quidem videtur, quae Tuae, ceu apparet, satis similis est; Ecce eam: Retentis litteris et Schema quibus usus es pro parte in epistola data 30 Julii 1738, voco praeterea g vim gravitatis acceleratricis qua corpora naturaliter ad descensum verticalem animantur, item n angulum minimum, quo corpora ex situ verticali OG paululum inclinantur, eritque vis motrix applicanda in O horizontaliter ad restituendum corpus ad situm quietis pro quolibet angulo minimo $\omega = \frac{ngV}{OG}\left(OG + \frac{\int(y^3+z^3)dx}{3V}\right)$; longitudinem penduli simplicis isochroni invenio

$$= \frac{3\int rr\delta p}{3V.OG + \int(y^3+z^3)dx},$$

ubi per p intelligo volumen singularum particularum, quae totum corpus innatans heterogeneum componunt, δ exprimit densitatem cujuslibet particulae p, r distantiam cujusque, perpendicularem, ab axe, circa quem fit oscillatio, tandem aquae densitas supponitur $= 1$ seu unitati, atque ita tota expressio longitudinis quaesitae erit geometrica, nil nisi lineas exprimens. Si corpus innatans est homogeneum, hoc est si ubique δ est constans, seu habens ad unitatem rationem invariabilem, erit G supra O, adeoque OG negativa; quod si praeterea OG tum sit etiam major quam $\int(y^3+z^3)\,dx : 3\,V$, fiet vis motrix negativa, adeoque corpus inclinatum non restituetur, sed praecipitabitur, quousque labi potest. Sciendum quoque est rectam AB inter oscillandum eum semper situm capere debere, ut ab unâ parte $\int yy\,dx$ sit $= \int zz\,dx$ ab altera parte, quod sine omni dubio Tu, Vir Cel., etiam observasti. Denique id etiam non est omittendum, quod centrum gravitatis G secundum vigorem non omnino immobile maneat durante oscillatione corporis, sed alternatim ascendat et descendat, quamvis isti ascensus et descensus sunt infinities minores quam excursiones puncti *O*, quae ipsae jam sunt infinite parvae. Hinc tuto considerari potest centrum gravitatis *G* tanquam omnino immobile, dum centrum gravitatis voluminis aquei *O* facit suas oscillationes laterales. Theoria mea extenditur quoque ad alios casus cognatos; ex. gr. si in vase aliquo quiescente datae figurae contineatur data quantitas aquae, cujus tota massa a causa quadam incipiat fluctuare, ascendendo nempe ab uno latere super horizontem, dum a latere opposito descendit infra eundem, mox postea motu contrario refluendo ad hoc latus ultra limitem horizontalem, de hinc iterum ad partem oppositam redeundo, atque ita porro. Reciprocantes istae fluctuationes repraesentant speciem oscillationum, quibus inveniri potest longitudo penduli simplicis isochroni. Alia item foret species oscillationum non minus curiosa. Si nempe pelvis aliqua habens ansam, ut lebetes solent habere, impleretur aqua, sed non ad summitatem usque, et deinde si ad ansam suspenderetur pelvis ex clavo firmiter fixo, expectando parumper donec aqua contenta ad quietem sese composuerit, ita ut ejus superficies suprema induerit situm horizontalem: Concipe nunc pelvim ita pendentem ex situ quietis tantillum dimoveri, sed placide, ne aqua ad fluctuandum concitetur. Facile utique intelligis, pelvim, sibi relictam, esse inchoaturam oscillationes minimas, sed ita, ut aquae superficies semper maneat horizontalis, secus ac fieret, si aqua esset congelata, quo casu pendulum non differet ab ordinario pendulo composito. Quaeritur ergo in nostra suppositione fluiditatis aquae, quanta sit longitudo penduli simplicis isochroni, abstrahendo facilitatis gr. a gravitate et a materialitate ipsius pelvis et ansae; video meam methodum huc pertingere, quamvis quia inter scribendum modo mihi in mentem venit, solutionem nondum tentaverim: non dubito quin pro sagacitate Tua quaesitum facile sis assecuturus. Sed abrumpo jam nimium fatigatus scribendo, ut Tu, Vir Exc., forsan fatigaberis legendo inconcitam meam scripturam. En tamen adhuc paucis observationem meteorologicam. Nupero scil. 6. Dec. st. v. qui dies consecratus est divo Nicolao, gentis Russicae patrono, hora circiter nona matutina, deprehendi mercurium in barometro ad tantam profunditatem descendisse, ad quam non memini unquam pervenisse. At vero in hoc statu non diu permansit, nam sub vesperem ejusdem diei rediit ascendendo ad mediocrem fere altitudinem, quae hic est 26 poll. 10 lin. Paris. tempestas non fuit valde procellosa, nisi quod ventus solito violentior spiraverit. Vale, Vir Celeberrime. Dabam Basileae a. d. 9. Decembr. 1739.

LETTRE VI.

=

Sommaire. Plainte sur la nécessité dans laquelle se trouve l'auteur de copier lui-même ses travaux. — Continuation sur la sommation des séries et l'intégration des équations différentielles. — Continuation sur les oscillations horizontales des corps flottans. — Problème d'Hydrodynamique. — P. S. Promesse d'envoyer sous peu la seconde partie des Recherches hydrauliques. — L'équation $yxxdx^2 + addy = 0$ peut-elle être réduite aux différences premières, dx étant supposée constante.

Viro Celeberrimo atque Excellentissimo, Leonhardo Eulero S. P. D. Joh. Bernoulli.

Non ita facile eluctatus sum asperrimam hyemem, quin magnam ejus partem in lecto transigere coactus fuerim, vehementi laborans tussi, nec non asthmate et podagra, quibus malis, nondum omnino liberatus, non potui satis attente considerare cuncta, quae mihi perscripsisti, elegantissima atque ex profundissimo Tuo ingenio depromta, in litteris 19 Jan. sine dubio styli veteris, exaratis, in quibus inveneram alias ad Filium meum datas, quas sine mora ipsi transmisi. — — Juvenis ille, quo usus fuerat Filius meus ad describendum suam dissertationem, nunc mortuus est ex febre ardente; sed etiam si adhuc viveret, non tamen possem ejus opera uti, neque cujusquam alius, ad describendas meas meditationes, quia soleo eas admodum confuse et abruptis verbis in chartam conjicere, atque tum demum inter describendum corrigere et in ordinem redigere; unde vides neminem alium, nisi memet ipsum, id operis suscipere posse et exequi. — —

Transeo nunc ad analytica Tua: Quae habes circa series hujusmodi: $\frac{1}{1 \pm n} + \frac{1}{4 \pm n} + \frac{1}{9 \pm n} +$ etc. sapiunt certe singularem ingenii sagacitatem; animo quidem meo concepi quasdam vias, quibus ad earum summam eruendam in omni extensione pervenire liceat, sed quia praevideo, multum laboris et calculi requiri ad executionem, non audeo rem aggredi, aliis occupationibus distractissimus; malo igitur talia a Te discere, quando suo tempore evulgaveris, quam hisce diu insudare et fortassis sine successu.

Hac tamen occasione aliquid monebo: Non est difficile demonstratu, quod summa hujus seriei:

$$\frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \text{etc.},$$

ubi termini omnes affirmativi sunt, sit ad summam ejusdem, sed signis terminorum alternative sumtis:

$$\frac{1}{1^n} - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} + \text{etc.},$$

ut se habet 2^n ad $2^n - 2$. Nosti vero procul dubio, me dedisse olim modum exprimendi hanc seriem:

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} - \text{etc.},$$

per hanc quantitatem finitam: $\int x^x dx$, cui illa series est aequalis, quando nempe fit x aequalis unitati. Quaero nunc, an pariter invenire possis rationem, quam illa habet ad eandem seriem terminorum signis continuo affirmative procedentium:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \text{etc.}$$

Memini Leibnitio, olim me roganti, an habeam compendium expedite summandi progressionem harmonicam

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots . \frac{1}{x}$$

ad terminos numero x continuatam, dedisse pro responso hoc, non quidem compendium, sed theorema, scilicet:

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots . \frac{1}{x}$ erit $=$ huic alteri progressioni

$$x - \frac{x.x-1}{2.2} + \frac{x.x-1.x-2}{2.3.3} - \frac{x.x-1.x-2.x-3}{2.3.4.4}$$
$$+ \frac{x.x-1.x-2.x-3.x-4}{2.3.4.5.5} \ldots . \pm \frac{1}{x},$$

cujus termini nil aliud sunt quam coefficientes binomii ad numerum x elevati, dividendo singulos per respective numeros 2, 3, 4, 5 .... x. Ex. gratia

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$$

erit aequalis huic

$$5 - \frac{10}{2} + \frac{10}{3} - \frac{5}{4} + \frac{1}{5} = \frac{10}{3} - \frac{5}{4} + \frac{1}{5}.$$

Quod attinet ad methodum Tuam, Vir Excel., integrandi aequationes differentiales, quae hac forma generali continentur:

$$o = y + \frac{a\,dy}{dx} + \frac{b\,ddy}{dx^2} + \frac{c\,d^3y}{dx^3} + \text{etc.},$$

video ex paucis quae dicis, meam solutionem problematis Cotesiani a Tayloro propositi habere aliquid analogi cum Tua ipsa solutione, quamvis non attenderis ipse; nam quod ais, aequationem algebraicam $p^4 + k^4 = 0$ resolvi posse in factores reales hos duos: $pp + kp\sqrt{2} + kk$ et $pp - kp\sqrt{2} + kk$, id ipsum est, quod ego jam dudum animadverti contra Taylorum, qui credidit haec nobis incognita fuisse, ideo, quia Leibnitius alicubi dixerat $\int dx : (x^4 + a^4)$ neque ad circuli neque ad hyperbolae quadraturam reduci posse. Respondi autem, Leibnitium hoc non asseverasse absolute, sed tantum relative ad methodum, qua usus fuerit in illo loco, ubi ita locutus est: „ego vero monstravi Tayloro, binomium x^4+a^4 revera resolvi posse in hos duos factores reales: $xx+ax\sqrt{2}+aa$ et $xx-ax\sqrt{2}+aa$, praeter duos alteros imaginarios $xx+aa\sqrt{-1}$ et $xx-aa\sqrt{-1}$." Inspice modo Acta Lips. Anni 1719 p. 257, ubi haec, quae dico, expressissimis verbis invenies, fluuntque ex fundamento totius meae solutionis problematis Cotesiani. Miror interim Te dicentem, aequationem algebraicam $p^4+k^4=0$ resolvi in *has duas aequationes* duarum dimensionum *reales* $p^2+kp\sqrt{2}+k^2=0$ et $p^2-kp\sqrt{2}+k^2=0$; debebas dicere: *resolvi in duos factores reales*, non vero in aequationes reales; nam $p^2\pm kp\sqrt{2}+k^2$ non possunt esse $=0$, alias foret radix $p=\mp k\sqrt{\tfrac{1}{2}}\pm k\sqrt{-\tfrac{1}{2}}=$ imaginario, ergo nullus casus datur, ubi fieri possit $p^2\pm kp\sqrt{2}+k^2=0$, hoc est, nulla relatio realis dabilis est inter p et k, ut inde formari queat $p^2\pm kp\sqrt{2}+k^2=0$, nisi velis utrumque p et k sumere $=0$, sed non est hic sensus verborum Tuorum.

Alteram, cujus mentionem facis, aequationem differentialem indefiniti gradus nimirum hanc:

$$o=y+\frac{axdy}{dx}+\frac{bxxddy}{dx^2}+\frac{cx^3d^3y}{dx^3}+\text{etc.}$$

posita ut supra dx constante, ego quoque jam ante initium hujus saeculi reduxi ad aequationem integralem finitam, quae quidem est generalis; sed fateor, in illa contineri mixtim tam reales quam non reales; interim possunt a se invicem distingui, ideoque non puto meam solutionem eandem esse cum Tua. Quidquid sit, exscribam meam methodum in Schedam separatam, quam examinare poteris, ex adversariis meis antiquis, ita tamen ut ad litteras Tuas, a, b, c etc., x et y accommodem scriptum meum.

Conspirant utique re ipsa nostrae duae solutiones de oscillationibus horizontalibus corporum aquae insidentium; sunt tamen quaedam monenda circa minus essentialia: Bene notas, quod et ego notaveram, eandem esse proprietatem rectae AB in suprema aquae sectione sumtae, sive dicatur esse $\int yydx = \int zzdx$, ut ego enunciavi, sive concipiatur AB, ut Tu fecisti, tanquam transiens per centrum gravitatis sectionis corporis in aquae superficie factae. Malebam autem rem ipsam exprimere per proprietatem pure geometricam, quam per mechanicam, eoque magis, quod hic superficies sola, in imaginatione tantum subsistens, nihilque materiae habens, non nisi improprie dici possit habere centrum gravitatis.

Secundo, Tecum non sentio, quod pace Tua dixerim, quando asseris, motum centri gravitatis totius navis, vel cujusque corporis innatantis, pendere a *distantia* rectae verticalis per centrum gravitatis *sectionis* aquae ductae, a recta verticali per centrum gravitatis totius corporis ducta; nam mihi clare videtur, considerari debere distantiam rectae verticalis per centrum gravitatis non sectionis aquae, sed (NB.) ipsius voluminis, quod corpus in aqua occupat, hujus, inquam *distantiam* a recta verticali per centrum gravitatis totius corporis ducta; etenim in centro voluminis (quod volumen inter oscillandum perpetuo ejusdem magnitudinis est supponendum) concentratur tota vis motrix, agens sursum verticaliter, ad restituendum corpus in situm pristinum quietis, quamdiu durant oscillationes: interim fateor, propter variabilitatem figurae voluminis, centrum ejus gravitatis non semper eundem locum occupare in corpore oscillante, sed hinc inde evagari in singulis oscillationibus ab uno latere in alterum respectu rectae lineae quae, dum corpus adhuc est in quiete, verticaliter transit per ejus centrum gravitatis.

Tertio non nego quod dicis, centrum gravitatis corporis totius oscillantis non manere omnino immotum; nam, secundum rigorem loquendo, revera mutat suum situm tam in directione horizontali quam verticali, magisque in illa quam in hac; sed cum supponantur oscillationes corporis totius quamminimae, hoc est quasi infinite parvae, potest demonstrari, mutationes illas centri gravitatis corporis, quas nominare vellem trepidationes, non tantum esse insensibiles, sed omnino infinities minores, quam sunt ipsae oscillationes minimae corporis ipsius, adeoque tuto negligendae, ut jam monui in praecedentibus meis litteris.

Quarto. In iisdem volebam sciscitari, sed quod dein obliviscebar, quid nempe intelligas proprie per vim firmitatis, de qua in litteris Tuis 30. Julii 1738 agis dicisque, quod sit illa quae resistit inclinationi corporis, eamque esse

$$= M\left(GO + \frac{\int(y^3+z^3)dx}{3V}\right).$$

Si per vim firmitatis intellectam cupis vim illam, per quam corpus inter oscillandum continuo verticaliter sursum urgetur a pressione aquae, et quam vim dixi concipiendam esse tanquam concentratam in centro gravitatis voluminis aquae a corpore occupati, tunc credo, Te voluisse dicere hanc vim esse

$$= \frac{M}{GO}\left(GO + \frac{\int(y^3+z^3)dx}{3V}\right),$$

omittendo per incuriam subjicere GO pro denominatore infra M; sic enim scribendum esse inveni ex mea solvendi methodo, in qua conjectura eo magis obfirmor, quod alioquin vis Tua firmitatis compararetur cum pondere M, multiplicato per lineam $GO + \frac{\int(y^3+z^3)dx}{3V}$, quae duo inter se sunt incomparabilia; talis autem incongruentia non reperitur in mea expressione, quippe in qua linea $GO + \frac{\int(y^3+z^3)dx}{3V}$, divisa per lineam GO, dat numerum, quisquis ille sit, qui indicat, quoties sumendum sit pondus M, ut fiat aequale vi firmitatis, vel, ut ego voco, vi motrici ex oscillatione oriundae et sursum tendenti; atque ita vis cum pondere comparatur, homogeneum cum homogeneo, quae utique non sunt asystata. Quod cum ita sit, judicandum relinquo, an vis Tua correcta

$$\frac{M}{GO}\left(GO + \frac{\int (y^3 + z^3)\,dx}{3V}\right)$$

commode satis appellari possit *vis firmitatis reluctans inclinationi corporis*; ut enim proprie dici possit *vim vi resistere*, oportet sane alteram alteri esse directe oppositam: hic vero *vis firmitatis* dicta, habens directionem verticalem, alteri vi, quae corporis inclinationem molitur, et quae ideo agit secundum directionem horizontalem nullatenus resistere potest, etiamsi illa maxima esset, haec minima; haud secus ac videmus magnum pondus ex filo pendens dimoveri posse a situ verticali per vim quantumlibet exiguam a latere horizontali impingentem. Meo igitur judicio melius esset, *pro vi firmitatis* adhibere eandem quidem expressionem, sed multiplicatam per n seu per angulum inclinationis: inveni enim

$$\frac{n.M}{GO}\left(GO + \frac{\int (y^3 + z^3)\,dx}{3V}\right)$$

esse vim motricem horizontalem, qua corpus inclinatum ad situm aequilibrii restituitur, proportionalem sane ipsi n, atque adeo etiam distantiae centri gravitatis voluminis a situ aequilibrii, uti requiritur in oscillationibus tautochronis. Quae in hac quarta annotatione dico exscripsi ex manuscripto, quod paravi circa hanc materiam juxta multa alia nova et curiosa ad dynamicam spectantia, quae aliquando, si otium daretur, in ordinem redigere et Vobiscum communicare possem.

Problemata illa duo de oscillationibus fluidorum, unum in vase quiescente, alterum in pelvi vel situla ex ansa suspensa reciprocante, quae inter scribendum mihi in mentem inciderunt ac Tibi proposui, statim post abitum litterarum mearum prorsus deserui atque neglexi, quia attentius rem considerans animadverti, problemata illa solvi non posse, nisi faciendo suppositiones quae mere sunt precariae nullumque habent fundamentum in ipsa rei natura, ita ut aliae atque aliae inde emergant solutiones, prout haec vel illa hypothesis adhibetur, dum interim una aeque ac altera eundem obtinet probabilitatis gradum. Sic Tuae solutiones videntur bonae et cum meis conspirantes; quia eadem generali hypothesi usi sumus, supponendo scilicet, in ejusmodi oscillationibus totam massam simul moveri, et quidem moveri certo modo, quod verum esse demonstrari nequit, propterea quod hoc pendeat a circumstantiis accessoriis, ex. gr. a quantitate fluidi, figura vasis, etc. Et vel hinc colligi potest, massam integram fluidi non semper in oscillationibus partium superiorum simul moveri, quod si vera sunt, quae legi et audivi, in maximis tempestatibus, cum suprema maris superficies vehementer agitetur et fluctuet, urinatores experiri tamen in profunditate 200 vel 300 pedum omnimodam aquaram tranquillitatem, imo se nullum plane motum sentire: unde praesumi potest, in nostris vasibus simile quid fieri, ut nempe superiores tantum partes in motum cieantur, reliquis inferioribus locum suum non mutantibus, cum praesertim superiorum motus sit tam languidus, tam placidus, ut non sit credibile, ab illis turbari posse situm inferiorum. Oporteret igitur prius inquirere, quousque se extendat superficies illa, quae separet partem aquae mobilis ab immobili, item quamnam habeat figuram illa superficies, et alia multa, quae vix definiri possunt a sagacitate humana. Adde quod in problemate secundo pelvis, scilicet ex unco pendentis et oscillantis, si ejus figura haberet ventrem tumidum et desineret superius in collum oblongum et angustum, ad cujus medium usque aqua pertingeret, annon facile percipimus, aquam cum vase et in vase sensibiliter haud aliter oscillaturum, quam si illa esset congelata et ita repraesentaret pendulum ordinarium. Ob has itaque multasque alias difficultates inseparabiles abstinui ab ulteriori scrutinio et animi applicatione tanquam frustanea. — — — Vale, Vir Excellentissime, atque mihi favere perge. Dabam Basileae a. d. 16 April. 1740.

P.S. Vides ex iis, quae ab initio hujus epistolae dixi, me ob valetudinem adversam non fuisse in statu absolvendi alteram partem meditationum mearum hydraulicarum; spero autem, nisi recidiva me capiat, tantum effici posse, ut prima vice, qua ad Te sum scripturus post acceptam responsionem sine longa mora transmittere queam in scripto partem secundam omnium quae circa hanc materiam a me dicendum restabant, quae quidem talia sunt ut ad multa plura detegenda viam pandant, Tibi praesertim, qui in sagacitate nullum parem habes. Potest ne reduci haec aequatio: $yxxdx^2 + addy = 0$ ad differentias primas? supponitur dx constans.

LETTRE VII.

SOMMAIRE. Envoi de la seconde partie des Recherches hydrauliques. — Recherches ultérieures sur la sommation des séries, sur l'équation différentielle, traitée dans la lettre précédente, et sur le mouvement des corps flottans. — Réduction d'une équation différentielle du second ordre au premier, en sorte qu'elle devienne intégrable ou, du moins, constructible.

Viro Eximio atque Celeberrimo LEONHARDO EULERO
S. P. D. JOH. BERNOULLI.

Ut tandem promissi fidem liberem, ecce! Tibi partem alteram meditationum mearum hydraulicarum mitto; scriptura non admodum est nitida et figurae rudi omnino Minerva delineatae, omnia quippe tremente manu peracta: Res ipsa vero, ut spero, Tibi Tuoque judicio ideo non minus placebit. Methodum meam investigandi velocitates aquarum fluentium ita adornavi, ut esset generalissima, inserviens pro vasis et canalibus cujuscunque figurae atque modo quocunque inter se adaptatis. Abstinui in explicatione fundamentali ab idea gurgitis, ne scilicet Angli possent captare ansam confundendi gurgitem meum cum Newtoni catarracta, quasi ego illum ab hac mutuatus fuissem, etiamsi inter se toto coelo differant. Usum vero et actionem gurgitis involvi duobus principiis, *hydrostatico* uno, altero *hydraulico*, ex quorum debita combinatione tota mea theoria absolvitur; id cum ante me nemini in mentem venerit, mirum non est, quod pariter ante me nemo dederit veram et directam methodum determinandi velocitates fluidorum ex vasis et canalibus erumpentium: Tu, Vir Clar., primus fuisti, qui eo, quo polles, ingenii acumine, visis quae communicavi in prima scripti mei parte, statim eruisti solutionem velocitatis quaesitae fluidi ex quolibet vase prosilientis. Quod si nunc talia, hactenus tam densa caligine obsepta, nunc vero demum in lucem feliciter a me protracta, non mereantur, ut aliquando promissum obtineant honorarium annuum, certe non video quid sit in posterum mihi sperandum. — — — —

Transeo nunc ad jucundiora: Gratias ago pro communicatione methodi Tuae summandi hanc seriem:

$$\frac{1}{1+n}+\frac{1}{4+n}+\frac{1}{9+n}+\frac{1}{16+n}+\text{etc.}$$

Intelligo quidem modum reducendi illam ad hanc formam: $1\cdot\alpha\pi^2-n\beta\pi^4+n^2\gamma\pi^6-n^3\delta\pi^8+n^4\varepsilon\pi^{10}-$ etc. sed non satis bene capio legem progressionis coefficientium $\alpha,\beta,\gamma,\delta$, etc.; quae enim disseris de eorum origine, obscura mihi sunt; aliquando Davus sum, non Oedipus, hoc praesertim tempore, quo praeter alia negotia, quibus distrahor, tam publica quam domestica, nunc ea accedunt, quae quotidie subnascuntur ex munere Decanatus oriunda, quod munus nuper meis ingratiis mihi fuit impositum, per integrum annum gerendum; unde vides attentionem, quae ad talia probe penetranda singulariter requiritur, saepissime interrumpi, id quod Tibi, qui hisce unice vacare potes, non aeque ac mihi contingit; adde incommoda senectutis meae, quae memoriam et attentionis facultatem mirum quantum debilitat.

Quod vero attinet ad rationem quam habet series

$$1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}+\text{ etc.}$$

ad eandem, sed alternis signis sumtam:

$$1-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}-\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}-\text{ etc.}$$

vidisti in praecedentibus meis litteris, quod dixi non esse difficile demonstratu, summam prioris esse ad summam alterius ut 2^n ad 2^n-2. Hoc quidem jam olim perscripseram Leibnitio, ante initium hujus saeculi, ut ex nostris litteris patet. Existente $n=1$, oritur progressio harmonica

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\text{ etc.},$$

quae erit ad $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+$ etc. ut 2 ad 0; unde sequitur, progressionem harmonicam habere summam infinitam, quod alio modo ego olim, et postea Frater meus sed per ambages demonstrabamus, etsi veritas ejus tam facile ex ipsa ratione 2^n ad 2^n-2 fluat.

Placent quae habes de summis serierum

$$1\pm\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}\pm\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^5}\pm\frac{1}{6^6}+\text{ etc.}$$

sed suspicor Te non alia methodo fuisse usum, quam quae ex mea derivata est, cujus specimen jam dedi in Actis Lipsiensibus anni 1697. Ipsam vero analysin exposui in iisdem Actis 1737, mense Februarii; ubi vidisti, fundamentum totius artificii in hoc consistere, ut ex dato quantitatis x^x logarithmo xlx per reversionem redeatur ad ipsam x^x, ope seriei notissimae, quae ex logarithmo dat numerum, ita ut sit

$$x^x=1+x\,lx+\frac{x^2\,lx^2}{2}+\frac{x^3\,lx^3}{2.3}+\frac{x^4\,lx^4}{2.3.4}+\text{ etc.}$$

Poteram utique, si vel tantillum attendissem, generalius ponere x^{mx}, vel etiam $x^{mx}\cdot x^n$, et tum utique, sequendo methodum meam, eadem facilitate invenissem, quod Tu nunc mihi proponis, nempe $\int x^{mx}\ x^n\,dx$, seu quod idem est:

$$\int x^{mx+n}\,dx = \frac{1}{n+1} - \frac{m}{(n+2)^2} + \frac{mm}{(n+3)^3} - \frac{m^3}{(n+4)^4} + \frac{m^4}{(n+5)^5} - \frac{m^5}{(n+6)^6} + \text{etc.},$$

posito nempe post integrationem $x = 1$. Hinc nunc sponte fluit, quod tum temporis animadvertere negligebam, posito scilicet $m = -1$ et $n = 0$, prodituram esse

$$\int x^{-x}\,dx \text{ seu } \int \frac{dx}{x^x} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} + \text{etc.}$$

Vellem autem scire, an fortasse per aliam viam huc perveneris, quam per meam ipsam; nam si Tua non esset diversa a mea, certe nihil fecisses quam mihi reddere meum cum foenore. En nunc par pari refero, et foenus foenore: Sit integrandum $\int x^{mx^p}\,dx$ per seriem, ubi p est exponens constans ipsius x in exponente mx^p, dico fore

$$\int x^{mx^p}\,dx = x - \frac{m}{(p+1)^2}x^{p+1} + \frac{mm}{(2p+1)^3}x^{2p+1} - \frac{m^3}{(3p+1)^4}x^{3p+1} + \text{etc.}$$

Expressionem, quam aequivalere inveneram huic seriei:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \cdot \cdot \cdot + \frac{1}{x},$$

dedi tantum pro theoremate, quod terminorum summam accurate exhibet, non tantum proxime, neque dedi pro compendio, quale Leibnitius a me petebat, sed, ut dixi, pro theoremate. Quod si vero duntaxat postuletur modus approximandi ad summam terminorum ad ingentem numerum continuatorum, mihi videtur id effici posse quodammodo simplicius quam mihi perscripsisti; ecce quo pacto procedo: Addantur actu, ut Tu facis, Vir Excell., aliquot termini primores, quorum numerus sit n, quo major autem est hic numerus, eo propius pervenietur ad desideratum. Sit igitur summa horum terminorum $= C$, dicaturque $x = n + y$, erunt termini reliqui summandi sequentes:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+4}+\ldots\ldots+\frac{1}{n+y}.$$

Pono $dy=1$, ut scilicet exprimatur haec series per

$$\frac{dy}{n+1}+\frac{dy}{n+2}+\frac{dy}{n+3}+\frac{dy}{n+4}+\ldots\ldots+\frac{dy}{n+y},$$

cujus integrale, seu summa est $l(n+y)-ln$, qui duo logarithmi sumendi sunt in logarithmica, quae habet subtangentem $=$ unitati; ut autem accommodentur ad quam tabula logarithmorum Vlaccii supputata est, cujus subtangens est 4342945, erit summa terminorum post terminum $\frac{1}{n}$ subsequentium $\frac{l(n+y)-ln}{4342945}$, cui addatur summa terminorum praecedentium, actu sumta, quae supponitur $=C$, habebitur summa totius seriei $=\frac{l(n+y)-ln}{4342945}+C$.

Exemplum 1. Quod Tuum est: Proponatur series ad terminum millionesimum prolongata:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots\ldots\frac{1}{1000000},$$

hoc est, sit $n+y=1000000$, sitque numerus terminorum praecedentium $n=10$, invenietur horum summa actu addendo, nempe $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\ldots\frac{1}{10}=\frac{7381}{2520}=C$. Item $l(n+y)=l\,1000000=6{,}0000000$, atque $ln=l10=1{,}0000000$, adeoque $l(n+y)-ln=5{,}0000000$, unde summa totius seriei, seu $\frac{l(n+y)-ln}{4342945}+C=\frac{50000000}{4342945}+\frac{7381}{2520}=14\,\frac{967235489}{2188844280}$, qui numerus tantillo major est quam Tuus $14\,\frac{392726722865723329}{1000000000000000000}$.

Exempl. 2. Esto numerus terminorum decem milliones: erit summa totius seriei $=\frac{60000000}{4342945}+\frac{7381}{2520}=16+\frac{967235489}{2188844280}+\frac{262822}{868589}=16\frac{2}{3}$ proxime.

Exempl. 3. Sit numerus terminorum centum milliones, erit summa totius seriei $= \frac{70000000}{4342945} + \frac{7381}{2520} = 18 + \frac{967235489}{2188844280} + \frac{525644}{868589} = 19$ quam proxime.

Coroll. Crescente numero terminorum per decuplum, crescet summa seriei per $2\,\frac{262822}{868589}$, hoc est fere per $2\frac{1}{3}$.

Scholion. Quo major sumitur numerus primorum terminorum actualiter summandorum et quo longius continuata supponitur tota series, eo propius ad verum accedet regula colligendi seriem totam in unam summam. Ratio hujus est evidens, quia, quo major est numerus n totusque $n+y$, eo magis considerari potest unitas tanquam dy, seu elementum ipsius $n+y$.

Miror Te nunc dicentem, Vir Clarissime, methodum meam, pro tractanda aequatione

$$o = y + \frac{a\,dy}{dx} + \frac{b\,ddy}{dx^2} + \frac{c\,d^3y}{dx^3} + \text{etc.}$$

fere congruere cum Tua, cum tamen antea illam tanquam non satis generalem (utpote ad solas logarithmicas sese extendentem) praedicaveris; Est ne forsan ejus rei ratio, quod me monente nunc demum intellexisti, Te perperam putasse quod aequationes duae $pp+kp\sqrt{2}+kk=0$ et $pp-kp\sqrt{2}+kk=0$, in quas resolvitur aequatio algebraica $p^4+k^4=0$, habeant radices duas ipsius k *reales*, cum tamen sint mere imaginariae, seu impossibiles? Hoc si supposuisti principium erroneum, oportet ut agnoscas, formulas illas, quas in anterioribus Tuis litteris mihi dedisti, non posse subsistere. Hoc unicum ergo sciscitor, an praeter meas logarithmicas habeas adhuc alias curvas possibiles, quae satisfaciant aequationi

$$o = y + \frac{a\,dy}{dx} + \frac{b\,ddy}{dx^2} + \frac{c\,d^3y}{dx^3} + \text{etc.},$$

an vero formulae illae Tuae, pro exemplo particulari

$$y + \frac{ed^4y}{dx^4} = 0$$

datae, sint erroneae? rogo ut cathegorice respondeas, sicuti decet inter amicos. Factores quidem sunt reales $pp+kp\sqrt{2}+kk$ et $pp-kp\sqrt{2}+kk$, ex quibus componitur p^4+k^4, sed non sunt aequationes reales, quia neutra habet radicem k possibilem. Quod spectat ad solutionem meam alterius aequationis differentialis gradus indefiniti

$$o = y + \frac{axdy}{dx} + \frac{bxxddy}{dx^2} + \frac{cx^3d^3y}{dx^3} + \text{etc.},$$

gaudeo illam Tibi perplacuisse, atque quaedam compendia suppeditasse. Interim parum refert, quod promiscue praebeat casus reales et imaginarios (debet utique omnes praebere) sed in potestate est secernere reales ab imaginariis, quod sufficit.

Non opus esse censeo ut serram diutius reciprocemus inutiliter disputando de motu oscillatorio corporum aquae innatantium; video enim alterum ab altero non intelligi, quamvis forsan ambo recte sentiamus. Non dixi considerandam esse rectam verticalem eam, quae transeat per centrum gravitatis *portionis corporis* aquae submersae, sed eam volui, quae transeat per centrum gravitatis, non quidem *portionis corporis*, sed *voluminis aquei*, quod portio ista occupat, et ita, ni fallor, locutus sum. Tu vero statuis rectam illam verticalem concipiendam esse tanquam transeuntem per centrum gravitatis *sectionis aquae*: interim quid, si ista duo centra essent in eadem recta verticali ex necessitate rei, foret utique nostra disputatio mera logomachia. Similiter dissentimus, uti videtur, tantum verbis, agentes de firmitate. Tu intelligis momentum ejusdem quam ego sumsi in sensu absoluto, haud aliter quam dicerem, vim firmitatis penduli simplicis ordinarii, oscillationes minimas facientis, esse ipsam fili tensionem, cujus vis aequalis est ipsi ponderi oscillanti et hac quidem vi, vel potius propter hanc vim affectat pendulum redire ad situm quietis, hoc est, ad situm verticalem, quod sufficit ad naturam firmitatis explicandam, etsi non improbam, pro accurata mensura habenda, vim illam multiplicari posse per arculum minimum, quem pondus excurrendo describit, ut ejus momentum prodeat.

Non me fugiebat, posse quidem aequationem secundi gradus $yx^2dx^2+addy=0$ reduci ad aequationem simpliciter differentialem; est enim ex earum numero, pro quarum reductione inveni jam diu regulam generalem, sed optabam talem, ut reducta esset integrabilis, vel saltem, concessa quadratura, construibilis; tali enim opus habebam ad certum aliquem scopum obtinendum.

Vale, Vir Excellentissime, meque porro ama. Dabam Basileae a. d. 31. Aug. 1740.

LETTRE VIII.

Sommaire. Jugement flatteur d'Euler sur les Recherches hydrauliques. — Détermination de la force rétroactive de l'eau qui coule d'un vase par un canal horizontal. — Non-accord entre les résultats de Jean et de Daniel B. — Euler est prié de rectifier quelques passages des Recherches hydrauliques. — Intégration de la formule $x^x dx$, pour le cas de $x = 1$ et d'une autre qui s'y rapporte. — Encore sur l'intégration de l'équation différentielle des lettres précédentes et réflexions qui s'y rattachent. — Invitation qu'a reçue Euler de la part du roi de Prusse, Frédéric II. — Protestations d'amitié.

Viro Celeberrimo atque Excellentissimo Leonhardo Eulero S. P. D. Joh. Bernoulli.

Jam duo elapsi sunt menses et amplius cum ad me perferrentur litterae Tuae novissimae, quo ipso tempore in lecto decubui misere laborans doloribus podagricis, chiragricis, ut et tussi asperrima, asthmate aliisque symtomatibus, praesertim quadam paralysi, quae manum dextram ita corripuit ut per plures hebdomadas calamo ad scribendum uti non potuerim, imo ne nunc quidem possim expedite exarare litteras quas non tam scribo quam pingo, ob vehementem manus tremorem, jam a longo tempore me infestantem atque indies ingravescentem; talia sunt senectutis incommoda, a quibus curari posse nulla spes affulget. Sed ne Te molestem importunis meis querelis, festino, at lente, ad litterarum Tuarum contenta:

Vix credideris, Vir Excell., quanto me gaudio perfuderit elogium quo decorare voluisti meditationes meas hydraulicas, a Te enim laudari, qui omnium es perspicacissimus simul etiam judex integerrimus, potiori mihi duco honori quam si a mille aliis laudarer; inserviet mihi judicium Tuum, tanquam omni exceptione majus, contra quosvis cavillatores, sive sint invidi sive ignari; facile enim percipis, non defuturos, praesertim in Anglia, qui more suo extenuabunt inventum non aliam ob causam quam quia debetur extraneo. Interim probe observasti ἀβλεψίαν meam, in determinanda vi retroactionis aquae ex vase per canalem horizontalem erumpentis; notasti quoque, uti decet, lapsum illum meum plane non promanasse ex fundamentis meae theoriae, sed tantum ex ejusdem perversa applicatione per meram inadvertentiam facta: En hujus rei originem. Cum in describendo alteram partem Hydraulicae meae pervenissem ad hunc locum, ubi de vi retroactionis ago, de qua materia ne cogitaveram quidem adhuc, ex improviso contigit ut inciderem in quasdam litteras veteres Filii mei, ubi praeter expectationem inveni aliquas formulas (sed sine analysi vel demonstratione) expositas; curiosus itaque videndi an respondeant principiis a me positis, festinanter feci calculum, quo tempore vestigia theoriae meae fere jam erant in ideis meis obliterata, quod ob memoriae labilitatem hac qua sum aetate saepissime mihi accidit; unde factum est ut putarem quemadmodum aqua erumpens ex vase per orificium in tubum primum, suam exerit vim in latus vasis tubo oppositum, ita quoque considerandam esse vim retrourgentem aquae transeuntis ex quolibet tubo per foramen suum in tubum proxime sequentem, quod autem nunc video verum non esse, quia illa vis quaelibet sustinetur vel potius absorbetur ab aqua jugiter pone sequente, adeo ut illa vis omnis jam contineatur in vi primitiva, quacum ex vase ipso in tubum primum pellitur et quae in latus oppositum vasis retroagit; sed quod incautus neglexi hoc fuit, quod debebam sumere vim aquae prementem fundum vel laminam perforatam, cum transit ex quolibet tubo in sequentem contiguum; hinc patet omnes istas vires, utpote antrorsum agentes, debere subtrahi a vi illa primitiva retrourgente, adeoque residuum tantum dare veram et absolutam vim qua vas retropellitur; proin tantum abest, ut quemadmodum putâram augeatur vis illa primitiva a multitudine tuborum adaptatorum in amplitudine decrescentium, ut potius diminuatur eadem prout numerus tuborum crescit, decrescentibus amplitudinibus. Haec est rei gestae narratio: Cur autem mentionem fecerim Filii mei a me abludentis, id factum est, quia credebam ipsius solutionem a mea discrepantem extare in sua Hydrodynamica, atque ideo absurdum fore si silentio praeterirem, quando videret publicum nos esse in contradictoriis. Rogaris ergo, Vir Clariss., ut supprimas in scripto meo transmisso quatuor articulos erroneos, nimirum art. 28, 29, 30 et 31 una cum duobus subjunctis corollariis, eorumque loco substituas totidem alios in separata charta Tibi transmittendos. Videbis nunc me conspirare cum Filio pro casu unius tubi in § 28 explicatò, ut et quod attinet ad duos tubos vasi adaptandos, qui casus est § 29, ubi pariter non est dissensus inter nos; unum tamen credere me facit, Filium ipsummet suo solvendi modo non satisfactum esse, quia non video causam cur de tribus tubis pluribusve numero determinatis nihil omnino dixerit, totamque istam materiam in opere suo hydrodynamico omiserit. Quod dedit de numero infinito tuborum seu de canali conoidico decurtato, qui casus est facilis, mecum convenit.

Pergo, Vir Excel., ad reliqua epistolae tuae capita: Accepi tandem nuper per manus Filii libros inter quos inveni quoque Musicam Tuam, pro qua, si missa est ex Tua liberalitate, debitas refero gratias. Legam eam quam primum licuerit per valetudinem. Optarim vero ut quae imposterum mittenda sunt, non per mercatores sed alia via commodiori transmittantur; hi enim lucripeti homines, qui nil faciunt nisi quaestus gratia, tot sumtus exigunt variis sub titulis, ut dubitem an non exsuperaturi essent pretium quod valerent libri ipsi si in auctione aliqua statim divendi deberent. Fortassis melius et promtius Tubingam dirigerentur, ut olim jam factum memini, ad Clar. Bulffingerum, qui a nobis non plus peteret quam quod ipse erogaturus esset.

Ob distractiones alienas viresque ex morbo adhucdum prostratas non licet profundius tentare jam serierum materiam, in quibus tanquam in elemento Tuo versaris felicissime; habeo interim de quo mihi gratulor, videns inventa mea olim facta Tibi saepissime ansam dare eruendi exquisitissimas veritates, aliaque producendi inventa ex meis deducta; inter talia refero quae nunc habes de sequestrandis integralibus imaginariis a realibus, quae utique omnia fluunt ex eo, quod expressiones quadraturae circuli reduci possunt ad logarithmos imaginarios et vicissim, quod me primum patefecisse, et quidem jam ab initio hujus saeculi, ingenue agnoscis. Tale quid etiam est, quod jam in superiori saeculo dedi pro integratione $\int x^x dx$ in casu quo $x = 1$, eo artificio usus ut ex logarithmo ipsius x^x, nempe ex xlx, iterum formarem, regrediendo ad numerum, valorem ipsius x^x per seriem

$$1 + \frac{xlx}{1} + \frac{xx(lx)^2}{1.2} + \frac{x^3(lx)^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

quod usque adeo placuit Klingenstiernio, professori matheseos Upsaliensi, ut sciscitaturus originem meae seriei

$$\int x^x dx = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \text{etc.},$$

casu $x = 1$, quam suo Marte nullatenus invenire poterat, praecipue hunc in finem iter ad me fecerit, per 6 menses postea commoratus, mea institutione usurus. Miror vero quod dicis, Vir Celeb., Te *ingenti* labore elicuisse methodum eam inveniendi, cum tamen ego non magnum laborem adhibuerim pro isto negotio, ut vidisti ex methodo mea quam demum A. 1737 publicavi, postquam fere per 40 annos eam suppresseram. Lemma illud pro inveniendo valore ipsius $\int x^m dx (lx)^n$, quod dicis in subsidium vocasse, jam tum temporis mihi innotuisse, cum solutionem ipsam integrationis formulae $\int x^x dx$ adinveni, facile percipis siquidem unum sine altero vix fieri potest: cujus rei ut Tibi fidem faciam, transcribam quod in schedula scriptum inveni inter chartas meas antiquas; calculus est brevis et perfacilis atque methodus similis illi per quam inveni seriem meam universalem pro integrando $\int n\,dz$ quam dedi in Actis Lips. 1694 ni fallor. Ecce ergo retentis meis symbolis integrationem formulae $\int x^p dx (lx)^q$, ubi p et q idem sunt quod apud Te m et n. Operatio est ut sequitur:

$$\int x^p dx (lx)^q = \frac{1}{p+1} x^{p+1} . lx^q - \frac{1}{(p+1)^2} x^{p+1} q lx^{q-1} + \frac{1}{(p+1)^3} x^{p+1} . q-1 . q . lx^{q-2} - \frac{1}{(p+1)^4} x^{p+1} . q-2 . q-1 . q lx^{q-3} + \frac{1}{(p+1)^5} x^{p+1} . q-3 . q-2 . q-1 . q lx^{q-4} - \ldots\ldots \pm \frac{1}{(p+1)^{q+1}} x^{p+1} . 1.2.3.4 \ldots q.$$

Nota. Si numerus terminorum, seu $q+1$, est par, finietur progressio signo —, sin vero $q+1$ sit impar, finietur signo $+$.

Coroll. In casu, quo x evadit $=1$, evanescunt omnes termini excepto solo ultimo, singuli enim, in quibus est lx ejusque aliqua potestas, aequantur zero ex natura logarithmorum, nam exponens q supponitur affirmativus; adeoque erit in hoc casu

$$\int x^p dx lx^q = \frac{\pm 1}{(p+1)^{q+1}} x^{p+1}.1.2.3.4\ldots q = \frac{\pm 1}{(p+1)^{q+1}} 1.2.3.4\ldots q$$

Vides expressionem meam ante tot annos inventam Tuae quidem omnino esse consentaneam, sed non notasti quod requiratur meum q vel Tuum n debere esse affirmativum: Dubito an inveniri possit formula aliqua pro casu in quo q vel n esset negativum. Inveni quidem hanc aliam seriem

$$\int x^p\, dx\, (lx)^q = x^{p+1}\left(\frac{1}{1+q}(lx)^{1+q} - \frac{p+1}{1+q.2+q}(lx)^{2+q} + \frac{(p+1)^2}{1+q.2+q.3+q}(lx)^{3+q} - \frac{(p+1)^3}{1+q.2+q.3+q.4+q}(lx)^{4+q} + \ldots\right)$$

quae pro negativo q aeque valet ac pro affirmativo, mutando tantum signa ante q posita. Sed nihil inde in rem nostram hactenus elicere potui.

Quod attinet ad methodum meam integrandi hanc aequationem $o = y + \frac{ady}{dx} + \frac{bddy}{dx^2} + \frac{cd^3y}{dx^3} +$ etc., non amplius scio an dixeris eam non satis esse generalem, de hoc vero non agebatur, nam ipsemet ego dubitavi de ejus legitima generalitate, siquidem pro fundamento posui curvam satisfacientem esse ex classe Logarithmicarum, cujus subtangens tantum quaerenda sit, etiamsi nondum pro demonstrato habuerim, imo ne nunc quidem habeam, nullam curvam ex alio curvarum genere dabilem esse, quae forsan etiam respondeat propositae aequationi. At vero scandalum mihi facesserat (hinc enim oborta est nostra controversia) quod in aliqua Tua anteriori epistola dixisti aequationem algebraicam, ad quam ego etiam dudum perveneram, $p^4 + k^4 = 0$, resolvi in has duas aequationes duarum dimensionum *reales*: $pp + kp\sqrt{2} + kk = 0$ et $pp - kp\sqrt{2} + kk = 0$. Ad quod ego respondi, has quantitates esse quidem factores reales, in quos altera illa $p^4 + k^4 = 0$ resolvi potest, quod jam olim demonstratum dedi Tayloro, sed illos factores utut reales non tamen posse esse aequationes reales, hoc est, non posse habere radices reales, adeoque impossibile esse ut $pp \pm kp\sqrt{2} + kk$ fieri possit = zero; fortassis autem mentem Tuam non satis clare expressisti. Caeterum facile concipio, quomodo ex logarithmis imaginariis perveniri possit ad valores reales per quadraturam circuli exprimendos, et qui ignorare possem, cum primus hanc materiam in scenam produxerim. Cavendum interim suspicor ne quod hic de imaginariis primi gradus intelligitur idem extendi debeat ad imaginaria altiorum graduum, dubito, inquam, an si reperiretur $y = e^{+x\sqrt[b]{-1}} + e^{-x\sqrt[b]{-1}}$, idem reduci posset ad quadraturam circuli realem.

Audivi cum voluptate, Te, Vir Celeb., invitatum esse nomine Regis Borussiae ad novam Academiam Berolini stabiliendam, imo Te jamjam acceptasse invitationem, de quo honore Tibi ex animo gratulor; Velit Deus secundare Tua coepta atque Te comitari in itinere, jam proximo, ut intelligo, mense Junii suscipiendo: Rogo ut mihi scribas quantum Tibi promissum sit salarium annuum. Etiam ego et ambo mei Filii accepimus litteras invitatorias jussu regio, sed mihi grandior est aetas et valetudo nimis vacillans, quam ut possim, quemadmodum optarem, auscultare tam honorificae atque illecebrosae ablectationi. Si vicenis annis junior essem, mehercle, ne per momentum quidem cunctarer; mihi adeo sordent omnia in Patria. Quid consilii capturis sint Filii mei, nondum scio; expectabunt credo significationem magis praecisam conditionum offerendarum, id quod fiet, si conjectare licet, finita expeditione in Silesiam suscepta. Quando veneris Berolinum, habebimus Te multo viciniorem, quod me sperare facit, Te aliquando ad Patrios Lares exspatiaturum, salutandorum Parentum gratia, quo ipso Tui videndi copia mihi daretur, quod vehementer desidero priusquam morior: Interim Vale, Vir Amicissime, et me amare perge. Dabam Basileae d. 18. Febr. st. n. 1741.

P. S. Sicuti scribis, pars prior hydraulicorum meorum jam erit impressa in IX Comment. tomo; pars altera sine dubio typis mandabitur pro tomo X. Sed cura quaeso ut correcte prodeat atque immunis a vitiis typographicis, quod monere necesse duco, quia vidi in tomo V exercitationem meam de triangulo retrocedente a pressione ponderis, hypothenusae impositi, tot scatere erroribus a typotheta commissis, ut ipse me vix cognoscere potuerim vel cogitata mea intelligere. Imprimis optarim ut figurae, Hydraulicae meae inservientes, a chalcographo caelentur cum aliqua venustatis gratia, quales ego exprimere non potui, quia nunquam didici delineandi artem, et omnes tremula manu, ut cunque potui, in chartam conjeci: Ad hoc autem opus erit ut Tu, Vir Excell., vel alius quispiam harum rerum peritus explicet chalcographo quid in singulis locis observandum sit ad res ipsas menti meae convenientes nitide probeque repraesentandas.

Hasce jam scriptas dimissurus eram mense Februario, Vir Celeb., cum nuncius paulo ante ad nos deferretur de descessu Tuo tanquam proxime instanti, id quod fecit, ut retinuerim donec scirem adventum Tuum Berolinum, veritus ne Te non amplius inveniant Petropoli, quanquam ut nunc video sat temporis ante abitum Tuum superfuisset quo meas litteras (si misissem) ibi adhuc accipere potuisses; mitto tamen nunc, etsi sero, ne responsione careat ad Tuas anteriores: Rogo ut schediasma adjectum quantocius Petropolin transmittas, spero enim satis mature illuc venire posse, ut inseri queat parti secundae Hydraulicae meae, antequam tomus X Comment. eousque impressus sit. Caeterum jucundissimum fuit intelligere ex novissimis Tuis litteris Berolini datis et nudius tertius acceptis, Te una cum Tua familia felicissime adventasse in locum novae Tuae stationis, de quo Tibi gratulor voveoque ut omnia Tibi ex animi sententia eveniant: Gratulor et mihi Te nobis viciniorem factum, indeque spem affulgere futurum ut aliquando huc excurras ad salutandum Parentes et Amicos, quod ut fiat ante meam mortem est quod ardentissime desidero. Non possum satis admirari excessum Tuae erga me benevolentiae, videns Tibi res meas usque adeo cordi esse, ut ultro et non rogatus easdem deferri curaveris ad Illustrissimum Comitem Ostermannum, quam in partem quoque adduxisti, sicuti ais, Clariss. Prof. et Consiliarium Grossium, qui hoc onus in se suscepturum promiserit. Nihil jam reliquum est hac vice, quam ut Te, Amice exoptatissime, quamvis absentem, animo exosculer, donec id, si Superis placet, coram facere possim. Vale, iterumque vale. Basil. a. d. 1. Sept. 1741.

LETTRE IX.

SOMMAIRE. Nouvelles rectifications à apporter au mémoire d'hydraulique. — Félicitations à l'occasion de la situation heureuse d'Euler à Berlin. — Regrets de ne pas pouvoir accepter l'appel qui lui a été également adressé par le gouvernement de Prusse. — Remercie Euler de la communication de ses recherches ultérieures sur les équations différentielles des ordres supérieurs.

Viro Celeberrimo atque Excellentissimo LEONHARDO EULERO S. P. D. JOH. BERNOULLI.

Ignosce, quaeso, tardiuscule respondenti ad litteras Tuas Berolini datas d. 16. Sept. Tam gratae mihi sunt litterae Tuae quam quod maxime, nosti vero quae mihi sint senectutis incommoda, ut adeo non opus sit pluribus excusare meam in scribendo segnitiem; Etsi hanc praeteritam aestatem triverim solito mitioribus molestiis, quas alias pariunt corporis mei infirmitas et languor, tamen non desunt negotia quam plurima, quibus quotidie obruor ab incumbente onere rectoratus academici, in me hoc anno devoluti atque adhuc duraturi usque ad sequentis anni solstitium aestivum: Vides quam parum temporis suppelat vacandi meditationibus mathematicis. Gratias ago pro promta missione ad Cl. Goldbachium mearum correctionum ad retroactionem fluidorum spectantium, optarem autem nunc eas nondum fuisse missas; inest enim adhuc aliquid ad quod non attenderam, rogo igitur ut, quam primum licuerit Petropolin scribere, cures supprimi illas correctiones una cum toto capite de retroactionibus aquarum fluentium; omittantur ergo §§ 26, 27, 28, 29, 30, 31 ut et dua subjuncta corollaria: quo facto mutandi sunt numeri §§ sequentium 32, 33, 34 etc. in 26, 27, 28 etc. ad finem usque totius scripti; Erit itaque circa finem dissertationis in scholio 5. citatio (§ 61) mutanda in (§ 55). Mirari non debes meam inconstantiam in tractatione hujus materiae, eam enim operi meo hydraulico interpolaveram longo tempore post scriptionis finem, cum fere obliteratum esset theoriae fundamentum in memoria mea, praeterquam quod non multum affinitatis habeat cum corpore hydraulico. Interim spero, si tranquilliori otio frui dabitur, me dissipatis obscuritatis nebulis omnia ad amussim pervestigaturum; et tunc quod invenero conjecturus sum in singulare schediasma sub forma supplementi: ita ut nihil referat sive separatim imprimatur, sive conjunctim cum ipso scripto hydraulico, si hoc forte nondum fuerit impressum.

Gratulor Tibi, Vir Exc., de egregio et vere Regio salario 2400 flor. quod Rex potentissimus meritis Tuis assignavit, sed et imprimis gratulor favorem et gratiam qua usque adeo flagras apud Clementissimum Principem ut Hic inter medios belli strepitus ad Te litteras propria manu exarare non fuerit dedignatus*). Fateor profecto mirabundus insolitas esse vir-

*) Cette lettre est la première dans une collection de 57 lettres autographes

tutes tanti Herois, qui cum incredibili fortitudine bellica conjungit pariter incredibilem in scientias et artes propensionem; ô si talis Princeps esset immortalis in corpore, sicut immortalis erit ejus gloria, atque ab Illo rerum gestarum porroque gerendarum memoria ad finem mundi celebranda! Tam belle, tam graphice mihi depingis felicitatem qua fruiturus essem, si exemplo Tuo locum dare vellem invitationi Regiae ad acceptandam stationem Berolinensem, ut fere mihi saliva moveatur et appetitus tentandi fortunam tam illecebrosam; sed reprimitur impetus statim ac cogito de innumeris impedimentis insuperabilibus, quae ipsemet melius intelliges ad rerum mearum statum attendens quam si vellem longa seria Tibi enarrare: Vel sola mea grandaeva senectus, tot undique infirmitatibus quas nosti infestata, spem omnem adimit commutandi clima nostrum cum alieno; fortassis ne itineris quidem satis longi molestiam perferre possem, quin in ipso durante itinere defatigatus succumbens in mortis praedam cederem. Nec est quod me excitare velis exemplo venerabilis senis De Vignola, annum jam agentis nonagesimum tertium; non enim cuivis homini hanc aetatis Corinthum adire contingit; et cum iste Vir fortunatus vix ulla sentiat, ut ipse dicis, senectutis incommoda, annon vigore junior

---

de **Frédéric-le-Grand** à **Euler**, collection qui se conserve aux archives de l'Académie. La voici:

„Monsieur **Euler**, J'ai été bien aise d'apprendre que vous êtes content de votre sort et établissement présent. J'ai donné les ordres nécessaires au grand Directoire pour la pension de 1600 écus que Je vous ai accordée. S'il y a encore quelque chose dont vous aurez besoin, vous n'avez qu'à attendre mon retour à Berlin. Je suis

Au camp de Reichenbach
ce 4 Sept. 1741.

Votre bien affectionné Roy
Fédéric."

est censendus quam ego, etsi sit annosior aetate? Interim si adhuc idoneus judicarer ad praestandum aliquid in re mathematica et physica, sed ita ut liceat in Patria manere et per commercium litterarium meditationes et inventa mea cum illustri vestra Academia communicare, promitterem certe pro modico subsidio annuo omnem meam operam in id unice collocandam ut inservirem pro viribus splendori Academiae vestrae procurando et promovendo, idque ut efficacius exequi possem, valedicerem omnibus aliis meis laboribus, imo quod plus est resignarem professionem meam Basilensem, non alium in finem, quam ut omne meum tempus vestris Musis consècrare possem. Videbis, Vir Celeb., an tale aliquid pro me fieri possit, sicuti aliis in locis fieri solet, vel in ipsa quam deseruisti Academia Petropolitana, ubi absentes quoque viri quidam gaudent honorariis annuis, ut Wolfius, Bulffingerus, Filius meus, olimque Hermannus, et nunc haud dubie Tu etiam, qui prae caeteris hac gratificatione dignus es.

Gratias ago pro communicatione meditationum Tuarum circa aequationem differentialem cujusvis gradus:

$$o = y + \frac{a\,dy}{dx} + \frac{b\,ddy}{dx^2} + \frac{c\,d^3y}{dx^3} + \text{etc.}$$

spirant omnia profundissimam ingenii Tui sagacitatem, sed doleo quod nunc non liceat singula satis attente examinare, ob negotiorum quotidie denovo mihi succrescentium multitudinem. Quaeris quae sint illa negotia? dicam; sunt illa quae solet facessere munus rectoris Academiae nostrae, quod pronuper in humeros meos devolutum est, quodque adhuc durabit usque ad solstitium aestivum anni sequentis; haud facile credideris, quantum molestiae ea de re singulis diebus mihi devorandum sit: vix una peracta est scena, cum ecce alia oboritur ludenda, non grata, non jucunda, sed fastidii plena, temporisque mei vorax et furax. Dum haec scribo, audio pulsari fores; sunt sine dubio quidam rabulae in jus vocantes reos suos; iturus ergo sum ad dirimendas liticulas, parvi saepissime momenti. Vale, Vir Amicissime, et me quod facis amore reciproco amplectere. d. 28. Octob. 1741.

Vide quam mihi labilis sit memoria: Priorem hujus epistolae paginam heri sub vesperam scripsi, alteram hodie mane scribens repetii ex oblivione quod jam scriptum erat de molesto rectoratus munere.

LETTRE X.

Sommaire. Considérations sur les évènemens politiques en Russie et en Prusse et leur influence sur le sort des lettres et des arts. — Recherches sur la rétroaction des fluides. — Solution d'un problème de mécanique proposé par Euler, et d'un problème analogue proposé par König de Berne.

Viro Celeberrimo et Excellentissimo, Leonhardo Eulero S. P. D. Joh. Bernoulli.

Distuli aliquantisper responsionem ad litteras Tuas die 26. Decembris datas, ut parcerem sumtui utrinque faciendo si utendum fuisset cursori publico; meas enim litteras tanti non aestimo ut Tibi sint onerosae. Spero nuperam illam subitamque revolutionem in Imperio Russico obortam non fore damnosam Academiae Petropolitanae, scripsit namque Clairautius, academicus Parisiensis, meus quondam discipulus una cum Maupertuisio et Koenigio Bernensi, scripsit inquam ille, se audivisse ex ore Principis Cantemiri, legati Russici ad aulam Gallicam, quod nova Russorum Imperatrix sibi firmiter proposuerit omnia religiose exequi ac promovere quaecunque a Parente Petro Magno fuerint instituta ac prae caeteris quidem res academicas, quod si ita se habeat, ut verisimile est, non dubito quin mutatio ista rebus Tuis futura sit utilis potius quam noxia: quare expectandum erit donec fermentationes Imperii deferbuerint omniaque pervenerint ad tranquillitatis statum permanentem.

Magis anxius haereo circa tumultus turbulentos in Imperio Romano excitatos, qui non videntur tam promte sedari posse, ut Rex vester potentissimus, qui pro ardore suo heroico ipsis maxime implicitus est, cogitare queat de restauratione Academiae Regiae scientiarum hoc adhuc anno suscipienda, siquidem bellum undiquaque magis magisque exardescere audimus, quod si ita per totam pene Europam serpere pergit, nescio ubinam quaerendus sit pacificator, qui tantas possit componere lites. Interim optandum esset ut Heros vester pro prudentia sua minus se exponeret in vitae periculum quam facit cum praelio se committit; Quid si enim in periculo occumberet, bone Deus! Quis resurgeret scientiarum Patronus? Quis Academiam vestram restauraret? Quis item omnia, quae optimus Princeps in bonum publicum meditatus est, effectui daret aut dare posset? Haec utique maxima ex parte dependerent ab indole successoris; quis autem scit, an eodem animo futurus esset affectus erga scientias et artes, an simili amore esset prosecuturus Eruditos, aut annon potius relicturus esset in squalore et torpore culturam bonorum studiorum.

Sed pergo ad privata, quae nos propius tangunt: et quidem quod attinet ad Hydraulica nostra, deprehendi tandem totum negotium de retroactione fluidorum ex vase erumpentium esse perquam facile et ex eorum numero quae, cum sint nimis obvia et, ut ita dicam, ante pedes posita, praeterimus quasi laterent in recessibus longe remotis; Interim error meus, si unquam error est nominandus, non tam consistit in falso ratiocinio quam in sinistra idea sub qua rem ipsam aspiciebam: Nunc autem observo ex natura virium motricium omnium stratorum ad supremam aquae amplitudinem translatarum producere pressionem $= gha$, hoc est, $=$ ponderi columnae aqueae cujus basis est h seu suprema amplitudo, et altitudo vasis a; Hinc sequitur ex communi principio hydrostatico vim actionis, qua expellitur aqua per amplitudinem infimam, hoc est per orificium w, debere esse aequalem ponderi columnae aqueae, cujus altitudo eadem a sed amplitudo w, adeoque $=$ ponderi gwa. Cum autem pro vasis, quorum centricae habent situm verticalem, canales vero situm horizontalem, generaliter inventum sit

$$\frac{vv(hh-ww)}{2h} + \frac{hwvdv}{dx}\int\frac{dt}{y} = gha$$

$=$ constanti pro vasis jugiter plenis, et cum praeterea vis reactionis in directione horizontali sit etiam constans nempe $= gwa$, erit haec $= \frac{vv(hhw-w^3)}{2hh} + \frac{wwvdv}{dx}\int\frac{dt}{y}$; patet utique vim illam retroagendi constanter esse eandem a primo effluxus momento per omnia velocitatis incrementa usque ad maximam seu aequabilem velocitatem, utpote quae vis semper est $=$ ponderi cylindri gwa, neque paradoxum hoc videbitur esse illi, qui attenderit nihil impedire quominus crescente primo termino $\frac{vv(hhw-w^3)}{2hh}$, alter $\frac{wwvdv}{dx}\int\frac{dt}{y}$ tantundem decrescat, et vice versa; Revera existente velocitate initiali, evanescet primus terminus, remanebitque alter $\frac{wwvdv}{dx}\int\frac{dt}{y}$ qui solus invenietur $= gwa$, si substituatur valor ipsius dx, et vicissim, si velocitas v est maxima, terminus posterior $\frac{wwvdv}{dx}\int\frac{dt}{y}$ evanescet, superstite priori $\frac{vv(hhw-w^3)}{2hh}$, cui soli tunc aequabitur gha. Quod si nullo influente in vas novo liquore, vas ipsum gradatim depleatur, perspicuum est retroactionem gradatim quoque imminui et ita quidem ut semper proportionalis sit altitudini aquae remanentis in vase, dicatur enim altitudo variabilis $= A$, eritque vis retroactionis $= gwA$.

Quae olim dedi pro determinatione descensus corporis gravis super plano inclinato mobili, bona quidem sunt, sed methodus, qua usus fueram in solutione per progressiones geometricas descendentes in infinitum, non satis est naturalis, neque adeo digna elogio sagacitatis, quo me pro urbanitate Tua eam ob rem mactare voluisti; inveni namque ex illo tempore citra hujusmodi progressiones alium solvendi modum magis naturalem et longius procedentem, cujus ope solvere potui sine magno labore novum problema, quod Tu, Vir Excell., mihi proponis in litteris Tuis, his verbis: „Sit „tubus seu canalis (sive gravis, sive gravitatis expers) mobilis „circa axem fixum, in quo versetur globus, qui ob gravita„tem in tubo sine frictione descendat (*et quidem, quod sine „dubio subintelligis, non rotando, sed fluendo*), simulque tubo, „motum inducat: quovis tempore determinare situm tubi et „globi in tubo, itemque utriusque celeritatem.“ Ponamus, brevitatis tantum gratia, casum simplicissimum: Sit scilicet tubus geometricus, hoc est, sine materia, sed materiae loco affixum sit in extremitate corpus q gravitatis expers, in altera vero extremitate sit axis, circa quem tubus est mobilis; In cavitate tubi concipiatur globus gravis cujus pondus sit p, a cujus magnitudine abstrahitur, vel potius cujus magnitudo ut infinite parva supponitur: effectus itaque hujus ponderis est duplex, nimirum in situ obliquo tubi, primo ut pondus descendat secundum longitudinem, seu directionem tubi, deinde ut ipsi tubo motum circa axem inducat, simulque adeo promoveat

*

corpus q in extremitate tubi annexum; Proinde globus p ex duplici hoc motu acquiret per compositionem motum verum et realem, describetque eo lineam aliquam curvam, cujus natura exprimitur hac aequatione

$$\frac{dx^2}{aa-xx}\int x\,dy = p\,dy^2\int\frac{y\,dx}{qaa+pyy};$$

Per a intelligo longitudinem tubi, restat ut explicem quid significent indeterminatae x et y: Per axem fixum esse ductam concipe rectam horizontalem, ad quam agatur porro recta verticalis ab extremitate canalis ubi est corpus q; quemcunque habeat situm canalis vel tubus, erit haec verticalis ea, quam voco x, distantia vero ponderis p in tubo ab axe fixo est y. Velocitates, quas in quocunque situ habent corpus q et pondus p, inveni ut sequitur: Posito scilicet g designare vim acceleratricem qua gravia animantur naturaliter ad descensum verticalem, erit quadratum velocitatis corporis q circa axem fixum $= 2\,g\,a\,p\int\frac{y\,dx}{qaa+pyy}$, quadratum velocitatis ponderis p in directione ipsius tubi $= \frac{2g}{a}\int x\,dy$, tandemque quadratum velocitatis actualis ponderis p in directione tangentis curvae quam describit $= \frac{aady^2-xxdy^2+yydx^2}{(aa-xx)dy^2}\cdot\frac{2g}{a}\int x\,dy$.

Si tubus ipse esset materialis, nullum vero corpus sibi annexum haberet, solutio non ideo foret difficilior; Sit enim quantitas materiae in eo uniformiter diffusa, quae dicatur r, dico eodem modo se rem habere, ac si tubus careret materia sed haberet in extremitate sibi annexum corpus $= \frac{1}{3}r$; Quod si tubus sit materialis et insuper habeat in extremitate annexum corpus q, hic casus considerari debet tanquam esset tubus immaterialis, sed qui haberet in extremitate annexum corpus $= q + \frac{1}{3}r$. Porro si quantitas materiae sit non uniformiter diffusa per longitudinem tubi, sed in data quacunque lege se habeat diffusio, poterit semper, concessa integrabilitate, res reduci ad suppositionem tubi immaterialis cum annexo corpore addendo ad corpus q. Ex. gr. procedant diffusiones materiae tubi transversim secti in ratione distantiarum y ab axe fixo, quo casu poterit substitui tubus immaterialis qui in extremitate annexum habeat corpus $= q + \frac{1}{2} r$, atque tunc omnia aequivalenter fient. Si diffusiones transversales materiae essent ut quadrata distantiarum ab axe fixo, haberetur tunc pro corpore annectendo $q + \frac{3}{8} r$. Et ita in aliis.

Quae scripsi in postremis hisce lineis vera sunt et certo vera, independenter ab ipsa solutione, quam dedi Tui problematis, quod forsan non in eo sensu accepi, in quo ipse accipiendum voluisti. Hac occasione lubet mentionem facere ulterius alicujus problematis olim a Koenigio supra memorato mihi propositi, eo tempore, cum apud me essent bini ejus socii Maupertuisius et Clairautius, quod problema aliquam habet affinitatem cum Tuo, quamvis non interveniat consideratio gravitatis globi tubo inclusi, utpote motum acquirentis a circulatione tubi circa alterutram extremitatem uniformiter rotati in plano horizontali. Ecce ipsam propositionem gallice mihi factam: *Déterminer la courbe que décrit un corps renfermé dans un tuyau, pendant que le tuyau se meut uniformément autour d'un centre sur un plan horizontal.* Paulo post dederam solutionem satis elegantem una cum constructione concinna, quae supponit descriptam esse logarithmicam spiralem, cujus ope exhibui innumeras curvas quaesito satisfacientes, quas inter in casu quodam particulari existit ipsissima logarithmica. Non dubito, quin pro mira Tua dexteritate mox sis soluturus propositum. Vale, mi Charissime! et me, ut soles, amare perge. Dabam Basileae a. d. 15. Martii 1742.

P. S. Vides, Vir Excell., pro solutione Tui problematis me etiam esse deductum ad aequationes differentiales non satis commode tractabiles; unum est imprimis, quod mihi scrupulum facessit: an scilicet liceat assumere directiones mutabiles, in quibus quaesivi vires acceleratrices, ut est ea, quae generatur in corpore in tubo, dum tubus ipse mutat suam inclinationem, et dein altera vis acceleratrix, cujus directio priori est normalis, adeoque etiam mutabilis. Sed huic scrupulo medelam inveni, resolvendo scilicet utramque illarum virium in duas collaterales secundum directiones duas immutabiles, unam horizontalem, alteram verticalem, atque ita conjungendo utrobique duas horizontales, habeo vim acceleratricem, unam horizontalem, qua mobile in horizonte promovetur aut repellitur; conjungendo autem utrobique duas verticales, acquiro unam verticalem, qua idem mobile ad descensum verticalem animatur. Pono nunc coordinatas r et z curvae quaesitae, quam corpus grave p actualiter describit, nimirum r pro abscissa in recta horizontali per axem fixum transeunte, et z pro applicata verticali; quo posito inveni, salvo errore calculi, vim acceler. horiz. $= \frac{gqaarz}{(zz+rr).(pzz+prr+qaa)}$ et vim acceleratr. verticalem $= g - \frac{gqaarr}{(zz+rr\ .(pzz+prr+qaa)}$: Vocetur quantitas prior $= R$, et posterior $= Z$, eritque $2\int R\,dr =$ quadrato velocitatis accedendi vel recedendi in directione horizontali, et $2\int Z\,dz =$ quadrato velocitatis descendendi in directione verticali. Hinc ergo, quia dr et dz eodem tempusculo percurruntur, prodibit $\frac{dr^2}{\int R dr} = \frac{dz^2}{\int Z dz}$

pro natura curvae quaesitae, quam mobile grave p descendendo actu describit, hoc est,

$$dr^2 \int Z\,dz = dz^2 \int R\,dr.$$

Habetur quoque velocitas corporis q, est enim elementum curvae inventae ad elementum contemporaneum, quod percurrit corpus q in circumferentia circuli, ut velocitas illius ad velocitatem hujus. Ergo etc.

LETTRE XI.

SOMMAIRE. Continuation sur le problème de mécanique d'Euler, résolu dans la lettre précédente. — Rapport entre ce problème et le principe de la conservation des forces vives. — Théorème de mécanique, proposé par J. B., et critique d'une démonstration indirecte qu'en a donnée Daniel. — Solution du problème de König et différence entre celui-ci et celui d'Euler. Explication du non-accord qui existe dans la manière d'envisager la nature de la rétroaction des fluides d'Euler et de J. B.

Viro Celeberrimo atque Excellentissimo, LEONHARDO EULERO S. P. D. JOH. BERNOULLI.

Dab. Basil. a. d. 27. Aug. 1742.

Jam propemodum quadrimestre effluxit ex quo ultimas Tuas litteras accepi, quo tempore misere cruciabar consuetis meis doloribus, praesertim ex asthmate et tussi pertinacissima oriundis; affixus lecto sat longo tempore opem medici adhibui, quod non statim facere soleo nisi summa necessitas urgeat. Ordinaria senectutis incommoda, a quibus nunquam liber sum, non multum curo, neque adeo inutilibus meis querelis aures Tuas perpetuo obtundere volo, quare etiam ex silentio meo non recte concludis valetudinem meam esse corroboratam; Te vero in aetatis flore viventem velit Deus conservare per longam annorum seriem, quod votum esse debet omnium quibus cordi est rei mathematicae propagatio.

Speramus hic Russiae Imperatricem id facturam propediem, ut restituatur Academia Petropolitana in pristinum splendorem, siquidem Illa voluerit Magni Parentis vestigia sequi ejusque laudabilem intentionem exequi. Speramus pariter fore ut Monarcha vester, cui nunc addictus es, post pacem tam gloriose confectam cum Regina Hungariae, jam cogitaturus sit serio de Musarum castris amplificandis in sua Ditione: Nullus dubito quin Tu inter primos sis eorum, qui Illius munificentiam sunt experturi.

Nolo mordicus affirmare nullum errorem irrepsisse in calculum, quem institui pro solutione Tui problematis de motu determinando tum globi gravis, tum tubi intra quem ille descendit; puto autem methodum meam esse bonam: Interim rem gratam faceres si velles examinare quae dedi in *Postscripto* anterioris meae epistolae pro determinatione coordinatarum curvae, quam pondus in tubo descendens describit, quod ut commodius fiat, lubet exprimere vires acceleratrices, tam horizontalem quam verticalem, per solas litteras in ipso contextu epistolae adhibitas, ubi nimirum $p =$ massae globi gravis in tubo descendentis, $q =$ massae corporis affixi extremitati tubi, $a =$ longitudini tubi seu radio circuli, quem corpus q describit, $x =$ sinui anguli, quem facit quaelibet positio tubi cum linea horizontali per punctum fixum, circa quod rotatur tubus, transeunte, $y =$ distantiae globi a centro in quolibet situ tubi; praeterea $g =$ vi acceleratrici gravitatis naturalis, tandemque $t =$ cosinui $= \sqrt{(aa - xx)}$. Dico, si analysis mea rite se habet, fore curvam quam describit globus in tubo talem, quam describeret libere in vacuo corpus aliquod per se non grave, sed quod sollicitaretur a duabus viribus acceleratricibus, una in directione horizontali, altera in directione verticali, quarum illa horizontalis $\frac{gqtx}{qaa+pyy}$, altera vero verticalis $= g - \frac{gqtt}{qaa+pyy}$ seu $= \frac{gqxx+gpyy}{qaa+pyy}$; Hinc omnia reliqua fluunt; Nam vis acceleratrix in ipsa curva, quam globus descendens describit $=$

$$\frac{g\sqrt{[qqttxx+qqx^4+2pqyyxx+ppy^4]}}{qaa+pyy} = \frac{g\sqrt{(qqaaxx+2pqyyxx+ppy^4)}}{qaa+pyy}$$

adeoque posito elemento curvae $= ds$, erit globi gravis descendentis in tubo quadratum velocitatis actualis in directione elementi

$$2g\int\frac{ds\sqrt{(qqaaxx+2pqyyxx+ppy^4)}}{qaa+pyy};$$

Est autem $ds = \frac{1}{t}\sqrt{(ttdy^2+yydx^2)}$, hoc itaque valore substituto, erit quadratum hujus velocitatis

$$= 2g\int\left[\frac{\sqrt{(ttdy^2+yydx^2).(qqaaxx+2pqyyxx+ppy^4)}}{t(qaa+pyy)}\right].$$

Porro ds^2 seu $\frac{ttdy^2+yydx^2}{tt}$ se habet ad $\frac{aadx^2}{tt}$, hoc est quadratum elementi curvae a pondere p descriptae ad quadratum elementi arcus circularis descripti a corpore non gravi q, erit ut quadratum velocitatis actualis ponderis p ad quadratum velocitatis actualis corporis q, quia nempe haec duo elementa eodem tempusculo percurruntur; ex quo habetur quadratum velocitatis actualis corporis $q =$

$$\frac{2gaadx^2}{ttdy^2+yydx^2}\cdot\int\left[\frac{\sqrt{(ttdy^2+yydx^2).(qqaaxx+2pqyyxx+ppy^4)}}{t(qaa+pyy)}\right].$$

Simili modo inveniretur, si opus esset, velocitas ponderis p non actualis, sed quae concipitur in directione tubi; superest denique ut determinetur natura curvae, quam pondus p actu describit, id est, ut determinetur relatio inter x et y per convenientem aequationem, haec autem obtinetur, si ex viribus acceleratricibus collateralibus supra inventis

$$\frac{gqtx}{qaa+pyy} \text{ et } \frac{gqxx+gpyy}{qaa+pyy}$$

quaerantur quadrata velocitatum tam in directione horizontali quam in directione verticali: Quadratum nempe velocitatis horizontalis erit ad quadratum velocitatis verticalis ut

$$\int\frac{qtx(tdy+ydt)}{qaa+pyy} \text{ ad } \int\frac{(qxx+pyy)(xdy+ydx)}{qaa+pyy}.$$

Quoniam igitur elementa coordinatarum curvae simul percurruntur, erunt eorum quadrata ut velocitatum quadrata, hoc est, $(tdy+ydt)^2 \cdot (xdy+ydx)^2 ::$

$$\int\frac{qtx(tdy+ydt)}{qaa+pyy} \cdot \int\frac{(qxx+pyy)(xdy+ydx)}{qaa+pyy}$$

unde haec oritur aequatio $(tdy+ydt)^2 \int\frac{(qxx+pyy)(xdy+ydx)}{qaa+pyy}$

$$= (xdy+ydx)^2 \int\frac{qtx(tdy+ydt)}{qaa+pyy}$$

ubi tantum sunt indeterminatae x et y, nam tertia $t = \sqrt{(aa-xx)}$ non est nova indeterminata*).

Quousque jam haec conspirent cum conservatione virium vivarum examinare non vacat; Hoc negotium Tibi relinquo, Vir Exc., qui in calculando polles majori facilitate et patientia: interim haud aegre perspicio ex solo hoc principio conservationis virium vivarum problema istud solvi non posse, in quo quippe principio non continentur sufficientia data, nisi aliunde petatur aliquod in auxilium quod sit specificum. Permitte nunc quaeso, ut vicissim proponam aliquam quaestionem ex dynamicis: Finge Tibi corpus aliquod datae figurae positum esse super plano horizontali perfecte polito, ita ut

*) Observo nunc quae in his paginis continentur, potuisse simplicius exprimi, sed diutius immorari me taedet.

sine ulla frictione super illo plano moveri possit; Concipe jam applicari ad hoc corpus movendum aliquam vim motricem in directione horizontali, quae si transeat per centrum gravitatis corporis, manifestum est corpus acquirere motum sibi in cunctis partibus parallelum: Quodsi vero directio impulsionis non transeat per centrum gravitatis, acquiret corpus motum rotatorium circa punctum aliquod, quod perseverabit in quiete, saltem ab initio, quod ideo vocare soleo *centrum rotationis spontaneum*; hoc centrum (ut Tibi sine dubio et forsan paucis aliis jam notum est) idem erit cum centro oscillationis, quod existit in recta per centrum gravitatis normaliter ducta ad lineam directionis potentiae propellentis, sumendo scilicet punctum, in quo ista normalis secet lineam directionis, pro puncto suspensionis, et corpus ipsum ex eo suspensum pro pendulo, vel vicissim hoc pro illo. Quaero itaque an habeas hujus theorematis demonstrationem directam, quae nempe deducta sit ex solis principiis dynamicis seu mechanicis, qualem ego possideo omni exceptione majorem; Filius meus Daniel habet quidem demonstrationem (quam et ego facile inveneram), sed est indirecta, petita ex principio metaphysico de Natura per viam simplicissimam operante, supponit enim centrum spontaneum rotationis eo in loco esse debere, circa quod a vi minima possibili corpus rotari possit eadem cum velocitate angulari; sed hoc est confugere ad causam finalem, quam saniores physici, ut nosti, proscriptam volunt ex Philosophia naturali; nec male, quid si enim in aliquo phaenomeno explicando duae se offerrent praerogativae, quae autem simul a natura observari non possent, quamnam ergo ex illis affectaret natura? quomodo ejus intentionem divinare possemus, praesertim si ambae praerogativae suam peculiarem utilitatem haberent in aequali gradu? quae si ita se habeant, non dubito Te in meam sententiam iturum ac proin inquisiturum in demonstrationem directam ex legibus mechanicis necessario fluentem pulcherrimi hujus theorematis: Si consueta Tua sagacitas aliquam suggesserit, rogo ut mecum illam communices, ex cujus collatione cum mea, ubi videro consensum, maxima mihi creabitur voluptas. Ecce, ut Te invitem ad officii paritatem, mitto hic Tibi apographum solutionis meae problematis Koenigiani, quam olim dederam, gallice conscriptam, ipsi Proponenti ejusque Condiscipulis Maupertuis et Clairaut; videtur multum affinitatis habere cum Tua, cui autem cum non adjeceris analysin, melius ipse examinabis, quam ego, utrum ambae inter se sint consentaneae, de quo quidem non dubito; Interim non video quid hujus problematis solutio contribuat ad solutionem alterius problematis a Te propositi de globo gravi in tubo descendente: Etenim nihil fere commune habent, nisi quod in utroque casu globi moveantur in tubis, ast ingens est discrimen in essentialibus, nam 1° in Koenigiano nulla est consideratio gravitatis; in Tuo gravitas sola motum moderatur; 2° in illo circulatio tubi supponitur uniformis et a motore externo producta; in altero tubi circulatio est inaequabilis et accelerata; 3° in illo, motus globi dependet a motu tubi, in altero vice versa, motus tubi, quem ego sine pondere et sine materia considero, dependet a motu globi gravitantis super tubum.

Natura retroactionis fluidorum varios admittit conceptus, qui nisi probe discernantur, facile in errorem deducunt, quare non miror Te, Vir Excell., qui ipse fateris quod hac de re non multum sis meditatus, adhuc discrepare a mea sententia, quam tandem amplexus sum post longam atque maturam omnium circumstantiarum considerationem: mihi quidem ab initio idem accidit, quod nunc Tibi, ut crederem attendendum esse ad vim compressionis (nominatam π in dissertatione mea hydraulica), qua strata liquoris constipantur quando fluit ex locis amplioribus in angustiora, sed postmodum animadverti has vires premere quidem latera canalis, facereque ut liquor ascendat in fistula aliquo in loco canalis inserta et verticaliter erecta, nihil autem omnino conferre ad retroactionem; nam cum liquor in canali horizontaliter sito sit quasi gravitatis expers, evidens sane est omnes istas vires comprimentes aliasque liquorem protrudentes, quae in canali generantur, eminenter jam contineri in sola illa vi, qua liquor ex vase per primam amplitudinem (quam vocavi m) in canalem ingredi cogitur; verum demonstravi (Te approbante) vim illam aequivalere ponderi cylindri liquoris, cujus basis est m et altitudo a liquoris in vase amplitudini m superincumbentis, quod pondus expressi per gam. Haec igitur vis premens vel urgens dum agit antrorsum, simul etiam agit retrorsum, sed ea tantum ejus pars sumenda est pro retroactione, quae nullam invenit resistentiam in exitu per foramen w, reliquum enim utrinque aequaliter agendo antrorsum et retrorsum in aequilibrio manet; Et sic vis retroactionis aequalis erit gaw, hoc est, ponderi cylindri liquoris altitudinis a super basi w. Caeterum non capio, quid Tibi velis, Vir Cl., quando dicis „Experimenta docuisse, pressionem aquae contra fundum vasis primo effluxus momento quasi esse nullam:“ Concipe ergo vas cylindricum perquam magnae amplitudinis et altitudinis, aqua plenum, et finge in imo hujus vasis prope fundum aperiri foramen quantumvis exiguum, per quod aqua effluere incipiat; Potuissem ne eo absurditatis procedere, ut dicerem secundum theoriam meam aquae gravitationem seu pressionem in fundum subito cessaturam esse, cum potius contrarium dixerim.

Antequam finiam, hoc adhuc dicere lubet de problemate Tuo ponderis p in tubo descendentis; Si nimirum corpus q in extremitate tubi abesset, ipseque tubus nullam haberet quantitatem sensibilem materiae respectu ejus, quae est in pondere p, descenderet utique hoc pondus in linea recta verticali: Quid si autem in tubo plura essent pondera p aequalia sive inaequalia in diversis distantiis a centro rotationis tubi; In hoc casu, quantum per transennam video, commune centrum gravitatis ponderum p describet rectam verticalem, ipsa vero singula p describent totidem conchoides, quarum illa verticalis erit communis asymtotus, earumque communis umbilicus in ipso centro rotationis. Vale, Vir Excell., et me ama.

(Solution du problème de Koenig, par Jean Bernoulli, annexée à la lettre précédente).

Lemme. Si d'un point C (fig. 1.) l'on tire les droites CA, CB, CD qui coupent sur PD les parties AB, BD, infiniment petites et égales, la différence des angles ACB et BCD, c'est-à-dire, $ACB - BCD = \frac{2ps\,ds^2}{(pp+ss)^2}$, en nommant la constante $CP = p$ perpendiculaire sur la droite variable $PA = s$; Cela se démontre facilement en différentiant l'angle ACB dans la supposition de ds constante.

Problème. Déterminer la courbe que décrit un corps renfermé dans un tuyau, pendant que le tuyau se meut uniformément autour d'un centre sur un plan horizontal.

Soit (fig. 2.) la courbe ABE que décrit le corps pendant que le tujau CA tourne sur le point C. Soit $CA = x$, $AB = ds$, BH ou $Bh = dy$. Lorsque le corps a décrit la petite ligne AB dans un certain tems, s'il était libre, il continuerait à se mouvoir dans la même direction et parcourrerait, dans un tems égal, une autre partie $BD = AB$: Mais à cause que le tuyau se meut et se trouve dans le même tems dans la situation CE, qui fait avec CB l'angle $ECB = BCA$, le corps, au lieu d'être en D, sera en E, à même distance du centre que le point D.

Ayant donc décrit du centre C l'arc DE, et tiré sur les deux tangentes BP, ER, les perpendiculaires CP, CR, l'on aura, par le lemme, la différence entre les angles ACB et BCD, en substituant, dans $\frac{2psds^2}{(pp+ss)^2}$, $\frac{xdy}{ds}$ pour p, et $\frac{xdx}{ds}$ pour s, et l'on aura $BCA - BCD = \frac{2dydx}{xx}$. Maintenant $\frac{RQ}{QB} = \frac{DF}{BF}$, c'est-à-dire $\frac{d\left(\frac{xdy}{ds}\right)}{\frac{xdx}{ds}} = \frac{DF}{ds}$, donc $DF = \frac{ds^2 \cdot d\left(\frac{xdy}{ds}\right)}{xdx}$, et à cause des triangles semblables HDB, FDE:

$$dx\ ds :: \frac{ds^2 . d . \left(\frac{xdy}{ds}\right)}{xdx} . DE = \frac{ds^3 . d . \left(\frac{xdy}{ds}\right)}{xdx^2};$$

Donc $\frac{DE}{EC} = \frac{ds^2 d(xdy)}{xxdx^2} =$ l'angle DCE, savoir, en prenant maintenant ds pour constante.

Or cet angle DCE est évidemment $=$ à l'angle ECB ou $BCA - DCB$. Donc $\frac{ds^2 d(xdy)}{xxdx^2} = \frac{2dydx}{xx}$; ou

$$(dx^2 + dy^2)(dxdy + xddy) = 2dydx^3,$$

$$\text{ou } xdx^2ddy + xdy^2ddy = dydx^3 - dxdy^3.$$

Retranchant du premier membre, et rajoutant après $2xdy^2ddy$, l'on a $xdx^2ddy - xdy^2ddy + 2xdy^2ddy = dydx(dx^2 - dy^2)$, c'est-à-dire $xddy(dx^2 - dy^2) + 2xdy^2ddy = dydx(dx^2 - dy^2)$; Donc $xddy + \frac{2xdy^2ddy}{dx^2 - dy^2} = dydx$, ou $\frac{ddy}{dy} + \frac{2dyddy}{dx^2 - dy^2} = \frac{dx}{x}$, ou (mettant pour $dx^2 - dy^2$ sa valeur $ds^2 - 2dy^2$)

$$\frac{ddy}{dy} + \frac{2dyddy}{ds^2 - 2dy^2} = \frac{dx}{x},$$

et intégrant, $l(ndy) - \frac{1}{2}l(ds^2 - 2dy^2) = lx$, ce qui donne $\frac{ndy}{\sqrt{(dx^2 - dy^2)}} = x$, d'où l'on tire $dy = \frac{xdx}{\sqrt{(nn + xx)}}$ ou, rapportant les dy à une circonférence dont le rayon CM a, et $MN = dz$, l'on aura enfin $dz = \frac{adx}{\sqrt{(nn + xx)}}$.

Construction de la courbe. Faisant $a = 1$, l'équation précédente se réduit à $z = l(x + \sqrt{(nn + xx)})$, et prenant c tel que $lc = 1$, l'on a $c^z = x + \sqrt{(nn + xx)}$, ou $c^z - x = \sqrt{(nn + xx)}$, d'où l'on tire $x = \frac{c^z - nnc^{-z}}{2}$. Ayant donc (fig. 3) décrit la spirale logarithmique HGK semirectangle, et du même centre C et du rayon $CK = 1$ le cercle KMN, nommant $CG = x$ et l'arc $KM = z$, on prendra de part et d'autre du point K les arcs KM, Km égaux, et l'on aura $CG = c^z$ et $Cg = c^{-z}$. Retranchant donc de CG une partie $GO = nnCg$, on partagera CO en deux également au point B qui sera à la courbe cherchée ABE.

LETTRE XII.

SOMMAIRE. Affaires des académies de St.-Pétersbourg et de Berlin. — Problème de mécanique sur le mouvement d'un poids descendant dans un tube, mobile autour de l'une de ses extrémités, dans un plan vertical. — Sur un problème analogue de mécanique, annoncé par Euler avec trop d'emphase et qui, selon J. B, n'est qu'un cas très particulier du théorème fort connu, relatif au mouvement gyratoire d'un corps ou d'un système de corps sur un plan horizontal. — Solution directe du probleme du mouvement d'un corps sollicité par une force dont la direction ne passe pas par le centre de gravité du corps. — Soupçons contre la justesse des expériences, rapportées par Daniel, dans son Hydrodynamique, relativement a la rétroaction des fluides. — P. S. Recommandation du libraire-éditeur Bousquet.

Viro Celeberrimo atque Excellentissimo LEONHARDO EULERO S. P. D. JOH. BERNOULLI.

Etsi dolores ex adversa valetudine enati videantur aliquando inducias concedere, tam cito tamen recurrunt, ut continuo quasi filo aegrotandum mihi sit; Partem anni praeteriti cum alia parte hujus anni conjunctam in lecto transegi, quantam inde voluptatem perceperim, sc. facile judicabis. Defectus attentionis non permittit aliter respondere ad litteras Tuas d. 22. Sept. 1742 scriptas, quam obiter tantum eas perstringendo: De ancipiti statu Academiae Petropolitanae, de qua scribis, etiam relationes publicae varia nobis referunt, sed ita tamen ut spem relinquant, Academiam istam tandem iterum emersuram, fortassis invita Russorum machinatione; Hanc in rem legi non ita pridem in novellis Belgicis, Dnum Consil. Schumacherum, qui fuerat retentus, a retentione fuisse liberatum utpote innoxium deprehensum a peculii academici depraedatione imputata.

Gratum fuit intelligere, Serenissimum Regem vestrum tandem serio cogitare de Musarum domicilio exstruendo, sed cur tam sero? regeris continua itinera atque gravissima negotia impedimento esse quominus Rex majori festinatione in promovendis litteris ac scientiis utatur; admitterem excusationem, sed quî fit quod eadem non pariter impediverit promtissimam aedificationem Palatiorum habendis comoediis aliisque spectaculis destinatorum? de quibus fert fama quod tam sint splendida, tam sumtuosa, ut plura centena millia florenorum eam in rem fuerint erogata: Utinam Musis contingeret sedem habere simili splendore ornatam!

Frequentes meae infirmitates corporis afficiunt quoque mentem usque adeo ut ei stuporem inducant qui non permittit examinare quae tanta subtilitate ratiocinaris de motu globi in tubo circa alterum suum terminum in plano verticali mobili descendentis; cum praesertim maximam et ut videtur praecipuam solutionis Tuae partem explicare omittas. Ob eandem rationem nolo negare quod addis contra meam solutionem, eam scilicet peccare contra conservationem virium vivarum, nisi fortassis apparentiam pro rei veritate sumseris: Sed suspendo judicium meum, donec me in statu deprehendam omnia minutatim explorandi; Interim si quid deferendum est auctoritati, fateor lubens Tuam apud me tantum habere pondus, quantum universus Mathematicorum orbis habere vix potest. Memini vero, Vir Excell., me Tibi proposuisse in litteris praecedentibus d. 27. Aug. 1742, in ipso fine, casum aliquem tubi omni materia carentis et sine annexo ullo corpore, sed in quo tubo duo plurave pondera et quidem in diversis distantiis a centro rotationis descendere incipiant pergantque; Dixi ex conjectura mihi videri, quod horum ponderum commune centrum gravitatis debeat descendendo describere lineam rectam verticalem, dum ipsa pondera singula describent totidem conchoides circa communem umbilicum qui erit in centro rotationis. Ad hunc autem casum, quod miror, ne verbum quidem reposuisti; forsan ideo, quia festinanter scribens litteras Tuas, nihil adhuc de eo determinatum habueras.

Quod attinet ad problema illud Tuum *de tubo circulari* AOB (utor Tua figura quam Te ad manus habere posse suppono, ego vero ob manuum tremorem delineare non possum) *in quo tubo gyretur corpus* A *sine frictione, ut ejus motus sit uniformis cum celeritate debita altitudini* b: ubi fingis *tubum circularem* $AOBA$ *cujus pondus* $= M$, *et centrum gravitatis in ipsius centro* C, *primum super horizontali plano jacere fixum; subito autem dum corpus in* A *versatur, solvi tubum circularem a plano cui incumbit, ut super eo libere sine frictione moveri possit*; quae inde deducis non addo, — quod, inquam, attinet ad problema hoc, miror Te tam magnifice de eo sentire, ut illud vocare audeas *argumentum prorsus novum et adhuc intactum*, cum tamen nihil aliud sit quam casus particularis theorematis tritissimi de corpore vel systemate corporum plurium gyrando progrediente super plano horizontali, ubi id semper obtinetur ut commune centrum gravitatis totius systematis progrediatur in linea recta et quidem velocitate uniformi, dum interim reliqua puncta systematis describunt singula aliquam ex cycloidibus sive ordinariam sive protractam seu contractam. Haec Te monere volui, Vir Celeb., ne Te praecipites protrudendo in publicum magna pompa rem quandam leviculam, quae ansam daret inimicis Tuis (nam et Tu tales habes, praesertim inter scurras Anglicanos qui omnes extraneos odio prosequuntur) carpendi indiscriminatim omnia Tua elegantissima inventa, atque hac occasione imprimis in Te torquendi Ciceronis proverbium *Laureolam in mustaceo quaerere.* Haec omnia quae Tibi hic scribo communicavi (Te ita volente) cum Filio meo, qui approbavit promisitque se ea Tibi prima scribendi occasione perscripturum, an steterit promissis a Te intelligam: Nihil autem in hoc casu singulari video, nisi quod tubus circularis $AOBA$ debeat moveri motu sibi semper parallelo, hoc est, meo loquendi more, moveri motu reptorio; verum hujus rei ratio statim manifesta est attendenti ad causam hujus motus, quae unice consistit in vi centrifuga corporis A, cujus directio perpetuo transit per C, centrum gravitatis tubi circularis; nosti interim corpus cujuscunque figurae, quod urgetur a potentia applicata in centro gravitatis, debere acquirere motum reptorium, qualemcunque demum describat curvam ipsum centrum gravitatis. Ecce nunc casum vulgarem systematis rotando progredientis eundem cum Tuo effectum habentis: Finge in plano horizontali bacillum AC primo quiescentem et oneratum in extremitatibus A et C duobus ponderibus, quorum illud $= A$, hoc vero $= M$; Concipe jam ponderi vel corpori A imprimi velocitatem $= \sqrt{b}$ in directione normali ad AC; Dico omnia heic evenire, quae in novo Tuo casu cum admiratione observas, scilicet pondus M describet cycloidem vulgarem $CMEc$, eandem illam quam Tu determinas, cujus nempe circulus genitor ENF

habet semidiametrum $EG = \frac{AC.A}{A+M}$; non autem observasti centrum G esse ab initio in communi centro gravitatis ponderum A et M, conformiter ei quod supra monui. Ex his vides novum hoc Tuum problema non esse tam mysteriosum quin ad rem tritam reduci possit: Interim fateor, si qnid mutetur in datis, fieri posse problema difficillimum forteque supra humanas vires; Ponatur ex. gr. tubus $AOBA$ non circularis sed ellipticus, cujus centrum gravitatis sit in ipso ejus centro C, manentibus reliquis datis ut posuisti, evadet sane problema in omnibus partibus solutu impossibile; excepto forsan hoc unico, quod punctum G seu commune centrum gravitatis ponderum A et M debeat hic etiam moveri celeritate uniformi in directione normali ad AC, quae celeritas hic iterum erit $= \frac{AC.A}{A+M}$; Scribo quidem haec dubitanter ex allucente quadam analogia, sed quod mihi non licet, in eo quo sum statu, accuratius inquirere, relinquo omnia incredibili Tuae sagacitati, quam nihil subterfugere potest.

Admitto solutionem Tuam directam problematis, quo quaeritur motus corporis sollicitati a vi, cujus directio non per ipsius centrum gravitatis transit; Dicis eandem illam jam reperiri in dissertatione Tua *Sur le cabestan*, sed illa dissertatio nondum impressa est, aut saltem ad manus meas nondum pervenit. Mea hujus problematis solutio comparebit in quarto tomo Opusculorum meorum, permissu meo Lausannae impressorum typis D^ni^ Bousqueti, ex cujus manibus accipies meo nomine unum exemplar, quod rogo ut aequi bonique consulas, etsi nihil contineant isti tomi quod cum limatissimis Tuis meditationibus comparari mereatur: Exhibeo enim mathesin sublimem, qualis fuit in infantia, Tu vero eam nobis sistis in virili aetate. Ut redeam ad problema inveniendi centrum, ut voco, spontaneum rotationis in corpore sollicitato a vi, cujus directio non per ipsius centrum gravitatis transit: Cum primum hoc problema mihi proponeretur a Filio meo, illudque solvissem directe et indirecte; quaesivit porro, in quo haesitare videbatur, si corpus sollicitetur, non ab una tantum vi sed a pluribus viribus in diversis distantiis applicatis sibique invicem parallelis; statim respondi, si omnes istae vires colligantur in unam, haecque applicetur in earum centro gravitatis, oriri tunc casum simplicem et aequipollentem quaesito.

Nolo nunc aliquid Tibi regerere circa retroactionem fluidorum, stamus ut videtur in diversis principiis, ita ut mirum non sit, si quoque diversimode de re ipsa sentiamus: Id tantum monere convenit, non satis tuto recurri posse ad experimenta a Filio meo in suis Hydrodynamicis allegata, tam promte enim velocitas aquae effluentis ex vase ab initio mutatur, ut facillime in observando *quid pro quo* fieri credamus. Vale, Vir Excell., et mihi favere perge. Dabam Basileae d. . Martii 1743.

P. S. Si qua in re consilium Tuum imploraverit Dus Bousquetus, rogo ut ei Te exhibeas benevolum et ad officia paratum; est enim vir honestissimus, cui nihil magis in votis erit, quam ut ingenii Tui foetus ope sui praeli in lucem edere possit, utpote commercium habens cum omnibus fere totius Europae bibliopolis, praeterquam quod non parcit sumtibus, ut impressionem suam reddat venustam et gratam, sive spectes chartae nitorem, sive characterum elegantiam, sive ornamenta figurarum, omnia placent oculis.

LETTRE XIII*).

Sommaire. Plainte contre les infirmités croissantes de l'âge. — Remercîments de l'envoi de l'Artillerie de Robins et de la Théorie du mouvement des planètes et des comètes. — Expectoration contre les Anglais à l'occasion de la lecture du premier de ces ouvrages et surtout du problème ballistique. — Traité des Isopérimètres d'Euler et Commerce littéraire entre Leibnitz et J. B.

Viro Incomparabili Leonhardo Eulero, Mathematicorum Principi S. P. D. Joh. Bernoulli.

— — — — — — — — — — — — —

Deberem nunc etiam ex nostris mathematicis Tecum conversari, sed vix credideris si Tibi dico quam turmatim me obruant senectutis incommoda, quae et animi et corporis vires mirum quantum obtundunt; memoria namque tam labilis est ut vix revocare possim quae paulo ante cogitaveram, attentio item tam molesta fit mihi, ut malim non incipere meditationes quam easdem continuare non posse; praeterea

*) C'est la seule lettre, écrite d'une main étrangère, revue et corrigée cependant par l'auteur.

acies oculorum hebescit, membra corporis aegre peragunt functiones suas, tremor manuum vix mihi permittit calamum dirigere, et quod omnium est pessimum, tussis perpetua et pectoris oppressio me tantum non enecat, usque adeo scilicet respirationem reddit difficilem. At vero patientia vincit omnia.

Accepi nuper ex liberalitate Tua binos tractatus, unum scilicet qui agit de tormentis bellicis, et de viribus pulveris pyrii, alterum autem qui continet theoriam motuum Planetarum et Cometarum, pro quo duplici munere debitas Tibi gratias ago. Priorem horum librorum jam fere totum perlegi, ita tamen ut calculorum Tuorum bonitatem supposuerim, non vero per me calculando examinaverim, quia plerique nimis perplexi videbantur, quos adeo ob adversae valetudinis statum in me suscipere non audebam. Putasne autem Robinsium, utpote Anglum, posse intelligere annotationes Tuas germanice scriptas contra ipsius tractatum hac de re editum? Miror Tuam lenitatem et urbanitatem erga Robinsium, qui tamen de Te, de me et de omnibus non-Anglis scoptice loquitur, Te nimirum vocat, ut audio, *machinam mathematicam*, quasi non aliter ageres quam solet machina vi sacomatis coacta. Me vero scurriliter admodum perstrinxit, cum vires vivas adstruxissem in dissertatione mea gallica *Sur le mouvement.* Gratias vero ago, Vir Clariss., pro honorificis elogiis quibus me in hoc Tuo opere aliquoties cumulare voluisti. Quod interim attinet ad problema illud de invenienda curva, quam describit corpus grave projectum in medio resistente in duplicata ratione velocitatis, quod problema a Keillio mihi propositum fuerat, quamvis nec ab ipso Keillio nec ab alio quocunque Anglo, imo ne a magno quidem Newtono solvi potuerit: Erras autem quando pag. 64

solutori mihi hujus problematis in ampliori sensu sumti adjungis praeter Hermannum etiam Taylorum, a quo certe nullam usque invenies solutionem, imo ne umbram quidem solutionis alicujus; Ut dicam quod res est, credo hujus Tui erroris originem a me ipso esse profectam; ecce quomodo! Cum vellem Keillio provocanti vices reddere, responderam sine mora me compotem esse factum solutionis sui problematis, sed aequum esse ut antequam exhibeam in publicum meam solutionem, ipse quoque deponat suam solutionem ad manus Monmortii, cui ego meam etiam submiseram; aut si solvere non possit, ut impotentiam suam publice confiteatur: ad haec siluit Keillius, magis mutus quam piscis, nisi quod dixerit, non agi inter nos, uter nostrûm possit melius problemata solvere; cur ergo per viam problematum me prius tentare voluit, si ad talionem se non teneri credidit? Non diu post illum prodiit in scenam Taylorus, amicus familiaris Monmortii, cui per litteras persuadere volebat se invenisse aliquam solutionem sub hoc characterum involucro:

$$(r^4 - 1 + 4nr^2 + 4ur^2)$$

tectam, vid. tom. II. pag. 399 Opuscul. meorum. Ego tum temporis genium fastuosum et impudentissimum Taylori nondum cognoscens, credidi bona fide illum et ex animi sententia locutum fuisse quasi sub illa characterum expressione $(r^4 - 1 + \ldots)$ latitaret aliqua problematis solutio, quam esset publice expositurus, statim ac mea in lucem prodiisset; interim prodiit mea, sed nihil in hunc usque diem ab illo vidimus pro explicatione inepti sui involucri. Quo agendi modo facile patet, Thrasonem nostrum hoc suo fuco id tantum intendisse, ut aliquandiu nobis persuaderet se solum ex Britannica gente extitisse, qui resolvere potuerit nodum hunc Gordium, tametsi magno quoque Newtono insuperabilem, id quod postea impotenti Tayloro non sine sale fuit exprobratum, vid. Opusculorum meorum tom. II. pag. 498, ubi incipiunt verba *lepidum est te videre triumphantem* etc. Ante aliquod tempus bibliopola Bousquetus tradidit jussu Tuo, uti dixit, duobus meis filiis exemplar unum utrique libri Tui de Isoperimetris, rogatus vero annon fortassis alterutrum horum duorum exemplarium mihi potius, quam filio meo juniori, cum quo non adeo familiariter uteris, fuerit destinatum, respondit hanc fuisse voluntatem Tuam quam executus sit, Tuum est decidere, utrum Bousquetus mentem Tuam recte perceperit; Da quaeso veniam curiositati meae, ut si forte me fuisse dixeris, cui haec donatio fuisset tradenda, ego vicissim gratias agere possim. Prodiit hoc anno Commercium philosophicum et mathematicum in duobus tomis in 4^0, quod mihi olim cum Leibnitio usque ad ejus mortem intercesserat. Nescio an aliquid Tua lectione dignum ibi sis reperturus; mittam tamen Tibi exemplar, si qua mittendi occasio sese obtulerit, id quod forsan fieri poterit per bibliopolam aliquem, qui ad nundinas paschales Lipsienses profecturus est, nisi forsan Tu mihi aliam promtiorem occasionem indicaveris. Vale et fave. Dabam Basileae d. 23. Sept. 1745.

LETTRE XIV.

SOMMAIRE. Triomphe du principe des forces vives en France.

Mathematicorum Principi LEONHARDO EULERO S. P. D.
JOH. BERNOULLI.

— — — — — — — — — — — — —
— — — — — — — — — — — — —

Non memini, an Tibi jam perscripserim, Bousquetum tandem ad me quoque misisse Tuo nomine tractatum ingeniosissimum de solutione problematis isoperimetrici etc. Quicquid sit vel non sit, refero vel repeto gratiarum actionem, donec aliquid habeam quod remunerationis loco Tibi offerri dignum sit. Quod interim Bousquetus jussu meo ad Te miserit commercium epistolicum Leibnitium inter et me, gaudeo certe etiamsi insint in hac farragine multa quae hodie scribi non mererentur, *sunt bona mixta malis, sunt mala mixta bonis.*

Robinsonius ille Tuus sive, ut se vocabat, Robinsius ille meus, qui me olim sugillabat propter vires vivas a me defensas et demonstratas, indignus est ut cum eo nos metiamur. Nam jam ante 20 circiter annos, cum in dissertatione mea gallica *Sur le mouvement*, defendissem vires vivas easque geometrice demonstrassem in illa dissertatione pro praemio scripta, statim et ipsi judices meam dissertationem condemnarunt, quibus applauserunt quidam ex Anglis interque eos ipse Robinsius, qui omnium ineptissime simul et acerbissime mecum egit; sed, quod intolerabile fuit, adjudicarunt judices praemium duabus dissertationibus, hanc unam ob causam quia refutarunt (at quam belle sc.) vires vivas: Scripseram ego ad Dnum Demairan, qui unus fuit ex judicibus (viribus vivis maxime intensus) eique vaticinatus fui, tempus venturum, quo qui negaverint vires vivas, eos non minus exagitatum iri quam qui motum terrae vellent negare; id certe nunc hodie fit in Gallia; heic enim doctrina de viribus vivis primum subiit martyrium, dum judices Galli condemnarunt eam a me assertam in dissertatione pro praemio, praeferentes duas alias non aliam ob causam quam quia ineptissime refutabant vires vivas, sicuti jam dixi. Possem itaque summo jure petere restitutionem in integrum, sed nolo movere camarinam.

Quod superest rogo ut illustri vestro Praesidi Maupertuisio plurimam dicas salutem, ad eum utique darem etiam litteras, nisi ad anteriores ad ipsum datas etiamnum responsum expectarem. Vale, Vir Clarissime et amicissime, meque amare perge. Dabam Basileae a. d. 24. Maj. 1746.