ıuf diese Aequation
$\frac{m^5}{8} + \text{etc.})$ posito
iti $= m$. Ich hatte
: infinita nur die
auf das Wenigste
n bei einem gradu
xperimentis obiter
in quaestione un-
wohl 100 gr. ge-
7. und 8. tomis
w. seyen de ter-
rierum. Was Sie
sit

su $x = a$,

deducirt zu seyn
ri; hab also der
gedacht. Ich will
vernehmen. Ich
aber lieber, als
ch seyn für die
inzige Mittel sie
wir sollten den
n, und würden
befinden . . . .
; Ansehen übrig
lemie in Berlin:

LETTRE XXVIII.

SOMMAIRE. Protestations d'amitié. Problème du levier brisé. Résolution d'une équation infinie. Rapport des sons des lames élastiques. Théorème du calcul intégral. Négociations avec l'Académie de Berlin.

Basel d. 9. Februar 1743.

Ich kann Ew. nicht genug beschreiben, wie erfreulich mir gewesen mit so nachdrücklichen Expressionen von Dero allerwerthesten Freundschaft versichert zu werden. Sie belieben gleichfalls meiner vollkommensten Hochachtung und aufrichtigsten Freundschaft völlig persuadirt zu seyn. Seit meiner Zurückkunft aus Petersburg hab ich gegen alle Leute meine Veneration für Dero sonderbare mérites bezeugt. Mein naturel ist gewisslich von aller jalousie weit entfernt, und erkenne ich mich viel zu gering, einige jalousie gegen Sie mir in Sinn kommen zu lassen, obschon ich übrigens erkenne einige Talente von Gott empfangen zu haben, welche Erkenntniss doch keiner Ruhmredigkeit zuzuschreiben bitte. Wir wollen es aber bei dieser beiderseits geschehenen Declaration ein für alle Mal bewenden lassen und in das Künftige von allen Lobreden abstehen: die Ihrigen beschämen mich und die meinigen sind doch allzeit zu schwach. Die Freundschafts-Bezeugungen hingegen sind mir so werth, dass Sie solche nicht genug werden wiederholen können. Es freuet mich, dass Ew. über meine theoriam hydrodynamicam völlig persuadirt sind, und freuet mich um so viel mehr, als ich festiglich glaube, dass Sie der Einzige sind, der par connoissance de cause hiervon überzeugt sind. Bitte also data occasione Dero Approbation öffentlich zu bezeugen; nicht dass ich hierin viel mérite suche, sondern bloss dass meine theoremata adoptirt werden, und die Wahrheiten in allen Stücken je mehr und mehr erkannt werden, worin aller ehrlichen Leute Absicht meistens bestehen sollte. Das argumentum de vecte luxato mag freylich unter Dero Händen von grosser Wichtigkeit worden seyn; da ich aber solches keineswegs perfectionnirt und es bei dem ersten Einfall habe bewenden lassen, so hab ich billig nicht viel daraus machen sollen; ich will aber solches dato otio ferner cultiviren, da ich von Ew. vernehme, dass es zu vielen neuen découvertes Anlass geben kann, und Ihnen alsdann meine Observationen communiciren. — Es ist freylich sehr operos die radicem hujus aequationis infinitae

$$1 = \frac{1.3}{2^2} m + \frac{1.3.5}{2^2.4^2} m m + \frac{1.3^2.5.7}{2^2.4^2.6^2} m^3 + \frac{1.3^2.5^2.7.9}{2^2.4^2.6^2.8^2} m^4 + \text{etc.}$$

zu finden. Ich glaube dass die series, so ich gefunden hatte, aber nicht aufgeschrieben, bequemer gewesen sey. Ich hab aber darauf gedacht, wie man obige Aequation könne accurater und compendioser consideriren: Sit verbi gratia septimus seriei terminus, oder $0{,}05061$ *) $= C$, so werden die

*) Dans la lettre originale ce chiffre est corrigé de la main d'Euler: 0,0506299.

folgenden quam proxime seyn: $\frac{6}{7}Cm + \frac{6}{8}Cmm + \frac{6}{9}Cm^3 +$ etc. und kann diese Substitution sine ullo sensibili errore Platz finden. Diese series ist $= 6 \,.\, 0{,}05061\, m \,.\left(\frac{m^7}{7} + \frac{m^8}{8} + \frac{m^9}{9} + \text{etc.}\right) =$

$$6m \,.\, 0{,}05061 \,.\, \int \frac{m^6\, dm}{1-m} = 6\, m \,.\, 0{,}05061 \times$$

$$\left(-\tfrac{1}{6}m^6 - \tfrac{1}{5}m^5 - \tfrac{1}{4}m^4 - \tfrac{1}{3}m^3 - \tfrac{1}{2}mm - m + l\,\frac{1}{1-m}\right) =$$

$$0{,}30366\, m\, l\frac{1}{1-m} - 0{,}30366\, mm - 0{,}15183\, m^3 - 0{,}10122\, m^4 -$$
$$0{,}07591\, m^5 - 0{,}06073\, m^6 - 0{,}05061\, m^7.$$

Wenn man nun in Ew. aequatione infinita die sieben ersten terminos behält, und für die folgenden den gefundenen valorem substituirt, so findet man in Decimalzahlen

$$1 = 0{,}30366\, m\, l \,.\, \frac{1}{1-m} + 0{,}75000\, m - 0{,}06928\, m\, m -$$
$$0{,}01414\, m^3 - 0{,}00511\, m^4 - 0{,}00191\, m^5 - 0{,}00061\, m^6.$$

Weil nun in dieser Aequation die fünf letzten termini sehr klein sind, so kann man in denselben den valor litterae m für bekannt nehmen und setzen $m = 0{,}80$, so wird die summa der fünf letztern terminorum werden $= -\, 0{,}05445$. Nach dieser Substitution findet man diese Aequation

$$1{,}05445 = 0{,}75000\, m + 0{,}30366\, m\, l\frac{1}{1-m},$$

welche, meiner estime nach, den verum valorem quantitatis m bei $\frac{1}{1000}$ geben muss. Will man die tabulas logarithmorum Vlacquii gebrauchen, so hat man

$$1{,}05445 = 0{,}75000\, m + 0{,}69930\, m\, l\frac{1}{1-m}.$$

Ich setze nun wieder $m = 0{,}80$ und finde $1{,}05445 = 0{,}99196$; hier ist das mendacium $+\, 0{,}06249$; darnach setze ich $m = 0{,}82$, und bekomme $1{,}05445 = 1{,}04205$, allwo das mendacium ist $+\, 0{,}01240$. Aus diesen zwei mendaciis, kann man per regulam falsi sicher schliessen $m = 0{,}825$. Hieraus folgt $2\,m - 1 = 0{,}650$; hieraus findet man den angulum quaesitum von 81° 6′, und kann dieser angulus nach meiner estime nicht mehr als etliche wenige Minuten fehlen. Ich wollte aber nach diesem ersten Versuch ohne grosse Mühe den angulum bis auf die Secunden richtig finden. — Ich sollte aus Dero Expression, die Sie gebrauchen, wegen der rationi sonorum laminarum elasticarum schier schliessen, dass ich diese rationem per multas et devias ambages gefunden habe. Ich kann diese rationem nicht anders als folgendermaassen determiniren: Erunt nempe soni laminae muro infixae et laminae liberae ut $\frac{1}{ff}$ ad $\frac{1}{\varphi\varphi}$, postquam satisfactum fuerit hisce aequationibus $\frac{1}{2f} = \text{Arc. sin.} \frac{1 + e^{1:f}}{\sqrt{(2 + 2e^{2:f})}}$ und

$$\frac{\cos.\ \text{Arc.}\ \frac{1}{2\varphi}}{e^{1:2\varphi} + e^{-1:2\varphi}} = \frac{-\sin.\ \text{Arc.}\ \frac{1}{2\varphi}}{e^{1:2\varphi} - e^{-1:2\varphi}},$$

allwo e bedeutet den numerum cujus logarithmus est unitas und die arcus et sinus ad radium 1 müssen referirt werden. Oder anstatt obiger zwey Aequationen kann man die zwey folgenden per series expressas gebrauchen, nämlich

$$\left(1 + \frac{1}{1.2.3.4f^4} + \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8f^8} + \text{etc.}\right) :$$

$$\left(1 + \frac{1}{2.3.4.5f^4} + \frac{1}{2.3.\ldots.9f^8} + \text{etc.}\right) =$$

$$\left(\frac{1}{2.3f^4} + \frac{1}{2.3\ldots7f^8} + \frac{1}{2.3\ldots.11f^{12}} + \text{etc.}\right) :$$

$$\left(1 + \frac{1}{1.2.3.4f^4} + \frac{1}{1.2.3.\ldots.8f^8} + \text{etc.}\right) \text{ et}$$

$$\left(2 + \frac{1}{3.4.2^4\varphi^4} + \frac{1}{3.4\ldots8.2^8\varphi^8} + \text{etc.}\right) :$$

$$\left(\frac{1}{1.2.2^2\varphi\varphi} + \frac{1}{1.2.\ldots.6.2^6\varphi^6} + \frac{1}{1.2.\ldots.10.2^{10}\varphi^{10}} + \text{etc.}\right) =$$

$$\left(\frac{1}{3.2^2\varphi\varphi} + \frac{1}{3.4.\ldots.7.2^6\varphi^6} + \frac{1}{3.4.\ldots11.2^{10}\varphi^{10}} + \text{etc.}\right) :$$

$$\left(4 + \frac{1}{1.2.\ldots.5.2^4\varphi^4} + \frac{1}{1.2.\ldots.9.2^6\varphi^6} + \text{etc.}\right).$$

Da man nun zu diesen radicibus nicht anders als operosissime appropinquiren kann, und hingegen Ew. eine ganz genaue Proportion determiniren, fürchte ich, das meine Methode vielen Umschweifen unterworfen sey: doch soll ich an deren Richtigkeit nicht zweifeln. Bitte also Ew. mit ein Paar Worte mir Dero Methode anzudeuten. Sonst kann man freylich sehr viele curiose experimenta machen über diese Materie; ich müsste aber einen allzugrossen Extract machen aus meiner Dissertation um solche zu beschreiben. Zum Exempel, ich habe (Fig. 45) die quantitatem LC erstlich ausgerechnet, darnach die laminam LD extremis digitis in puncto C ergriffen und selbige percutirt, so ist der sonus clarus, distinctus et diu durans gewesen. Wenn ich aber die laminam an einem andern Orte hielt, so war der Ton ganz verdumpffen und indistinctus, als wie an einer gespaltenen Glocke. Wenn Ew. verlangen, so werde ich in dem nächsten Schreiben hierüber fernere éclaircissemens geben; ich glaube aber, Sie werden ohne mich schon Alles erforschen. — Was Dero theorema anbelangt quod sit

$$\int x^{m-1}\,dx\,(a^n-x^n)^{\frac{k-n}{n}} =$$
$$\frac{a^{k+m-n}}{m}\cdot\frac{n}{k}\cdot\frac{2n(k+m)}{(k+n)(m+n)}\cdot\frac{3n(k+m+n)}{(k+2n)(m+2n)}\cdot \text{etc.}$$

so sehe ich dessen Demonstration nicht gleich ein, und will solche lieber von Ew. mir andeuten lassen, weil mir der Kopf nicht aufgeräumet, diese Materie, die ich seit langer Zeit nicht tractirt habe, wieder vor die Hand zu nehmen. Sie belieben mir auch unbeschwert zu melden ex quo principio der Wallisius seinen casum in hoc theoremate contentum hergeleitet, als welches ich auch wieder vergessen. Mein schwaches Gedächtniss macht, dass ich allzeit eine jede Materie wieder von vorne anfangen muss, und doch kann ich nicht von mir erhalten, dass ich meine Meditationen aufschreibe. Ich sehe zum Voraus, dass wenn ich aus der Relation, in der ich bis dato mit Petersburg gestanden, kommen sollte, mein ganzer mathematischer Plunder in Koth fallen werde: video meliora proboque, deteriora sequor. Doch wird mir die Lust von Ew. zu profitiren niemals vergehen; bitte also mir ferner Dero gelehrte Inventionen zu communiciren . . . . . Es ist wahr, dass der editor meines Vaters Opera dem König dediciren wird und im Sinn hat selbige I. K. M. selbst zu praesentiren. Er wird auch die Ehr haben Ew. ein Exemplar in meines Vaters Namen zu praesentiren. Ich wollte wol herzlich gern, dass ich mit ihm könnte die Berliner Reise thun und noch einmal in meinem Leben Ew. sammt Dero geehrtesten Familie sehen. Ich bin aber in Basel viel zu stark angebunden und muss auch meines Seckels Rechnung tragen, um eine so kostbare Reise zu unternehmen. Wenn die Akademie in Berlin wäre aufgerichtet worden, hätte ich auf die eine oder die andere Weise mehr Apparenz dazu gesehen. Der Herr Maupertuis hat mir in des Königs Namen nach allen vorhergegangenen Tractaten noch einmal gemeldet vor etwas Zeits que le Roi comptoit sur moi; ich hatte mich aber niemals völlig determiniren können. Nunmehro ist aber wenig Apparenz mehr, dass das akademische Project so bald werde ausgeführt werden. Ich hatte mich unterdessen blos dahin declarirt, dass ich wohl für eine kurze Zeit der Akademie meine Dienste offeriren wollte, dass ich mir auch getrauete im Anfang und bei derselben erstern Einrichtung würkliche Dienste leisten zu können, und zwar weit grössere, als wenn dieselbe allbereits völlig etablirt sey; die Permission getraute ich mir auch von meiner Obrigkeit für eine Zeit zu erhalten und