LETTRE V.

SOMMAIRE. Causes qui ont retardé l'envoi de la seconde partie des Recherches hydrauliques. — Impatience de voir le traité de Musique. — Sommation de la série $\frac{1}{1 \pm n} + \frac{1}{4 \pm n} + \frac{1}{9 \pm n}$ etc. — Renvoi à des problèmes analogues résolus par Jacques B. — Intégration des équations différentielles des degrés supérieurs. — Recherches sur la longueur du pendule isochrone. — Descente extraordinaire du mercure dans le baromètre.

Viro Celeberrimo atque longe Eximio LEONHARDO EULERO S. P. D. JOH. BERNOULLI.

Jam per aliquot menses valetudine usus minus prospera, ut mihi fieri solet hac imprimis anni tempestate, ac subinde lecto affixus ob insultus podagricos, promtius respondere non potui ad litteras Tuas novissimas multa eruditione refertas; quam ipsam ob causam ne nunc quidem adhuc transmittere possum secundam partem meditationum mearum hydraulicarum, utpote nondum omnino descriptam, etiamsi materiam a longo jam tempore in parato habeam: Adde quod multo copiosior erit haec altera pars atque sui triente superabit primam, unde facile intelliges describendi laborem non posse non esse mihi molestissimum, cum ob hebetudinem oculorum tum ob tremorem manuum, quae duo sunt mala quotidie fere ingravescentia; quodque pessimum accidit hac in re est, quod ipse cogor describere, cum nullus mihi detur amanuensis, qui talia describere velit vel possit. — — —

Filius meus professor Lipsiam misit chirographum Exc. Schumacheri ad repetenda exemplaria Commentariorum Tuique tractatus de Musica, pro quo debitas Tibi gratias ago, quem, ubi accepero, legem magna cum voluptate, et eo majore quidem, quod de hac materia hactenus nihil mihi videre contigit, quod mihi ex asse satisfacere potuerit.

Methodus, qua uteris, Vir Exc., ad summandam seriem $\frac{1}{1 \pm n} + \frac{1}{4 \pm n} + \frac{1}{9 \pm n} +$ etc. est omnino curiosa et extraordinaria, sed simul postulans calculum longum et intricatum, a cujusmodi instituendis jam a multo tempore absterreor, ob senectutis incommoda superius memorata, contentus iis, quae sola vi meditationum, sine longa analysi, eruere possum. Daretur forsan, si velles sagacitatem Tuam consuetam consulere, alia via brevior magisque trita idem praestandi; sunt enim infiniti casus jam dudum soluti, nimirum omnes illi, quos olim communi opera cum Fratre meo defuncto tractavimus, in quibus Tuum n significat numerum quadratum cum praefixo signo —; Aperi modo, si habes, tractatulum posthumum Fratris mei de arte conjectandi, ubi pag. 252 reperies hoc problema solutum: *Invenire summam serierum Leibnitianarum aliarumque, quarum denominatores sunt numeri quadrati aut trigonales, minuti aliis quadratis vel trigonalibus.* Exemplum habetur pag. 252 hujus seriei:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{35} + \text{etc.},$$

hoc est hujus: $\frac{1}{4-1}+\frac{1}{9-1}+\frac{1}{16-1}+\frac{1}{25-1}+$ etc. quae est $=\frac{3}{4}$. Item pag. seq. 254 hoc exemplum habetur: $\frac{1}{7}+\frac{1}{16}+\frac{1}{27}+\frac{1}{40}+$ etc. seu $\frac{1}{16-9}+\frac{1}{25-9}+\frac{1}{36-9}+\frac{1}{49-9}+$ etc. quae series est $=\frac{49}{120}$. Tuum est examinare, an Tua sublimia cum hisce trivialibus quadrent.

Non minus quoque curiosus videtur modus Tuus aequationes differentiales altiorum graduum una vice ita integrandi, ut statim ad signationem finitam perveniatur. Memini me jam ante multos annos simile quid invenisse, quod in adversariis meis consignavi, sed nunc inquirere non vacat. Ex paucis quae in hanc rem adumbrationis causa adjicis sine demonstratione, concludo fere, Tibi ad has meditationes occasionem praebuisse ea, quae olim publice dedi pro solutione problematis Cotesiani a Tayloro propositi omnibus geometris non Anglis, ubi modum tradidi, resolvendi quantitates integrandas in factores reales, eosque discernendi a non realibus: Quod vero attinet ad generalem Tuam formulam:

$$y+\frac{a\,dy}{dx}+\frac{b\,ddy}{dx^2}+\frac{c\,d^3y}{dx^3}+\frac{d\,d^4y}{dx^4}+\text{etc.}=0,$$

posita dx pro constante, huic quidem satisfacere potest semper aliqua ex curvis logarithmicis, cujus tantum subtangens est quaerenda, quod ita facio: Aequatio generalis pro istis curvis haec est: $y=n^{x:p}$, ubi p denotat subtangentem generalis Logarithmicae, et n numerum, cujus logarithmus $=$ unitati, ita ut $l\,n=1$. Hoc ita exprimendi morem primus ego introduxi jam ante exitum superioris saeculi, id quod nunc magnum usum habere compertum est. Differentiando ergo continuo $n^{x:p}$ habebuntur valores ipsarum dy, ddy, d^3y, d^4y, etc. nimirum: $d\,y=\frac{dx}{p}\cdot n^{x:p}$, $d\,d\,y=\frac{dx^a}{pp}\cdot n^{x:p}$,

$d^3y = \frac{dx^3}{p^3} \cdot n^{x:p}$, $d^4y = \frac{dx^4}{p^4} \cdot n^{x:p}$, etc. Quibus valoribus substitutis in formula Tua $y + \frac{a\,dy}{dx} + \frac{b\,ddy}{dx^2} + \text{etc.}$ mutabitur illa in hanc: $n^{\frac{x}{p}}\left(1 + \frac{a}{p} + \frac{b}{p^2} + \frac{c}{p^3} + \frac{d}{p^4} + \text{etc.}\right) = 0$. Diviso itaque per $n^{x:p}$ et multiplicato per maximam dimensionem ipsius p, orietur aequatio algebraica, cujus quaelibet radix p dabit subtangentem Logarithmicae quaesitae. Exemplum quod das aequationis differentialis quarti gradus

$$y\,dx^4 = k^4 d^4y, \text{ seu } y - \frac{k^4 d^4 y}{dx^4} = 0$$

ita facillime solvitur. Cum enim hic litterae a, b, c deficiant atque sit $d = -k^4$, habebis hanc aequationem quatuor dimensionum, sed non affectam, $p^4 - k^4 = 0$ seu $p = k$. Dico igitur, logarithmicam, cujus subtangens $= k$, satisfacere aequationi propositae $y - \frac{k^4 d^4 y}{dx^4} = 0$. Fateor interim hoc modo pro hoc exemplo unam tantum exhiberi logarithmicam, a Te vero exhibentur plures curvae

$$y = Ce^{-\frac{x}{k}} + De^{\frac{x}{k}} + E \sin A\tfrac{x}{k} + F \cos A\tfrac{x}{k}.$$

Fateor etiam, si proponeretur $y + \frac{k^4 d^4 y}{dx^4} = 0$, fore meam logarithmicam impossiblem seu imaginariam; sed idem etiam in Tua solutione, licet universaliore, contingeret, nam apud Te foret pariter k impossible, seu non reale.

Cum nuper mihi aliquantulum plus otii nacto in mentem rediret id quod scripseras de oscillationibus corporum in aqua natantium, volebam per me ipsum inquirere in longitudinem penduli isochroni oscillationibus quas subeunt hujusmodi corpora in aqua natantia, postquam ex statu quietis nonnihil deturbata fuerunt per vim, cujus directio est horizontalis: Post aliquot horarum meditationem compos factus sum perfectae solutionis, ut mihi quidem videtur, quae Tuae, ceu apparet, satis similis est; Ecce eam: Retentis litteris et Schema quibus usus es pro parte in epistola data 30 Julii 1738, voco praeterea g vim gravitatis acceleratricis qua corpora naturaliter ad descensum verticalem animantur, item n angulum minimum, quo corpora ex situ verticali OG paululum inclinantur, eritque vis motrix applicanda in O horizontaliter ad restituendum corpus ad situm quietis pro quolibet angulo minimo $\omega = \frac{ngV}{OG}\left(OG + \frac{\int(y^3+z^3)dx}{3V}\right)$; longitudinem penduli simplicis isochroni invenio

$$= \frac{3\int rr\delta p}{3V.\,OG + \int(y^3+z^3)\,dx},$$

ubi per p intelligo volumen singularum particularum, quae totum corpus innatans heterogeneum componunt, δ exprimit densitatem cujuslibet particulae p, r distantiam cujusque, perpendicularem, ab axe, circa quem fit oscillatio, tandem aquae densitas supponitur $= 1$ seu unitati, atque ita tota expressio longitudinis quaesitae erit geometrica, nil nisi lineas exprimens. Si corpus innatans est homogeneum, hoc est si ubique δ est constans, seu habens ad unitatem rationem invariabilem, erit G supra O, adeoque OG negativa; quod si praeterea OG tum sit etiam major quam $\int(y^3+z^3)\,dx : 3\,V$, fiet vis motrix negativa, adeoque corpus inclinatum non restituetur, sed praecipitabitur, quousque labi potest. Sciendum quoque est rectam AB inter oscillandum eum semper situm capere debere, ut ab una parte $\int yy\,dx$ sit $= \int zz\,dx$ ab altera parte, quod sine omni dubio Tu, Vir Cel., etiam observasti. Denique id etiam non est omittendum, quod centrum gravitatis G secundum vigorem non omnino immobile maneat durante oscillatione corporis, sed alternatim ascendat et descendat, quamvis isti ascensus et descensus sunt infinities minores quam excursiones puncti O, quae ipsae jam sunt infinite parvae. Hinc tuto considerari potest centrum gravitatis G tanquam omnino immobile, dum centrum gravitatis voluminis aquei O facit suas oscillationes laterales. Theoria mea extenditur quoque ad alios casus cognatos; ex. gr. si in vase aliquo quiescente datae figurae contineatur data quantitas aquae, cujus tota massa a causa quadam incipiat fluctuare, ascendendo nempe ab uno latere super horizontem, dum a latere opposito descendit infra eundem, mox postea motu contrario refluendo ad hoc latus ultra limitem horizontalem, de hinc iterum ad partem oppositam redeundo, atque ita porro. Reciprocantes istae fluctuationes repraesentant speciem oscillationum, quibus inveniri potest longitudo penduli simplicis isochroni. Alia item foret species oscillationum non minus curiosa. Si nempe pelvis aliqua habens ansam, ut lebetes solent habere, impleretur aqua, sed non ad summitatem usque, et deinde si ad ansam suspenderetur pelvis ex clavo firmiter fixo, expectando parumper donec aqua contenta ad quietem sese composuerit, ita ut ejus superficies suprema induerit situm horizontalem: Concipe nunc pelvim ita pendentem ex situ quietis tantillum dimoveri, sed placide, ne aqua ad fluctuandum concitetur. Facile utique intelligis, pelvim, sibi relictam, esse inchoaturam oscillationes minimas, sed ita, ut aquae superficies semper maneat horizontalis, secus ac fieret, si aqua esset congelata, quo casu pendulum non differet ab ordinario pendulo composito. Quaeritur ergo in nostra suppositione fluiditatis aquae, quanta sit longitudo penduli simplicis isochroni, abstrahendo facilitatis gr. a gravitate et a materialitate ipsius pelvis et ansae; video meam methodum huc pertingere, quamvis quia inter scribendum modo mihi in mentem venit, solutionem nondum tentaverim: non dubito quin pro sagacitate Tua quaesitum facile sis assecuturus. Sed abrumpo jam nimium fatigatus scribendo, ut Tu, Vir Exc., forsan fatigaberis legendo inconcitam meam scripturam. En tamen adhuc paucis observationem meteorologicam. Nupero scil. 6. Dec. st. v. qui dies consecratus est divo Nicolao, gentis Russicae patrono, hora circiter nona matutina, deprehendi mercurium in barometro ad tantam profunditatem descendisse, ad quam non memini unquam pervenisse. At vero in hoc statu non diu permansit, nam sub vesperem ejusdem diei rediit ascendendo ad mediocrem fere altitudinem, quae hic est 26 poll. 10 lin. Paris. tempestas non fuit valde procellosa, nisi quod ventus solito violentior spiraverit. Vale, Vir Celeberrime. Dabam Basileae a. d. 9. Decembr. 1739.