Correspondance mathématique et physique Tome I, page 3.

LETTRE I.

EULER à GOLDBACH.

=

SOMMAIRE. Interpolation des séries à loi variable. Première application des calculs différentiel et intégral à la doctrine des séries.

Vir Celeberrime.

Petropoli d. 15 Octobr. A. 1729.

Cum nuper in nonnulla incidissem, quae ad interpolandas series, legem, uti appellare soles, variabilem habentes, facere visa sunt, ea accuratius contemplatus sum, et multa, quae huc attinent, detexi. Quae, quia Tibi, Vir Celeberrime, placitura esse mihi significavit Clarissimus Bernoulli, Tibi scribere, Tuoque submittere judicio statui. Hujus seriei 1, 2, 6, 24, 120, etc., quam a Te multum tractatam esse vidi, hunc inveni terminum generalem

$$\frac{1.2^m}{1+m}\cdot\frac{2^{1-m}.3^m}{2+m}\cdot\frac{3^{1-m}.4^m}{3+m}\cdot\frac{4^{1-m}.5^m}{4+m}\ \text{etc.}$$

ex infinito factorum numero constantem, qui terminum ordine m^{mum} exprimit. Is quidem in nullo casu abrumpitur, et aeque si m est numerus integer, tantum ad verum magis

*

magisque accedit, ac si m fuerit fractus. Sed tamen per eum admodum prope quemque terminum invenire licet, idque eo facilius, quo minus assumatur m. Si autem aliquot solum, uti visum sit, factoribus, termino generali commodior induci potest forma: ut si duobus prioribus factoribus contenti esse velimus, habebitur $\frac{1\cdot 2}{(1+m)(2+m)}\,3^m$ pro termino ordine m. Sin autem generaliter n factores capiantur, sequentibus reliquis neglectis, erit terminus generalis $\frac{1.2.3\ldots n}{(1+m)(2+m)\ldots(n+m)}(n+1)^m$, qui, quo major accipitur numerus n, eo propius ad verum accedet. Communicavi haec cum Clar. Bernoulli, qui peculiari modo eundem fere postremum eruit terminum, in hoc a meo diversum, quod aliam potestatem loco $(n+1)^m$ adhibeat, in qua determinanda fortasse factorum neglectorum rationem habuit. Credo ipsum Tibi nuper inde deductum numerum termino seriei, cujus index est $1\frac{1}{2}$, proximum misisse. Potest hic terminus generalis praeterea alium habere usum in inveniendis factis ex infinito factorum numero constantibus, quae sint aequalia numero finito: ut posito $m = 2$, habebitur factum $\frac{4}{3}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{16}{15}\cdot\frac{25}{24}\cdot\frac{36}{35}$ etc. quod aequale est 2. Similiter posito $m = 3$, erit $\frac{8}{4}\cdot\frac{27}{20}\cdot\frac{64}{54}\cdot\frac{125}{112}$ etc. $= 6$. Terminum hunc generalem ex eo inveni fundamento, quod haec series 1, 2, 6, 24, etc. in infinitum continuata tandem evadit geometrica. Et hujusmodi terminos generales etiam pro aliis seriebus, quae in infinitum cum geometricis confunduntur, exhibere in promtu est. Sed cum hoc modo termini intermedii non nisi veris proximi inveniantur, omissa hac serierum tractandarum ratione, aliter in hac re versari coepi, in id intentus, ut terminos intermedios non tantum veris proximos, sed ipsos veros, si fieri posset, invenirem. Ad id

vero inveniendum, cum seriei terminum generalem haberi oportere visum sit, quem vero peculiarem et ab adhuc usitatis longe diversam habiturum formam praevidi. Obtulit se igitur nova quaedam terminorum generalium forma, quae quidem ad omnes prorsus series potest accomodari jam cognitas, sed longe ea latius patet, quippe infinitarum serierum legem variabilem habentium, quarumque adhuc methodis consuetis nulli termini generales inveniri potuerunt, determinare possum terminos generales. Hi autem sunt ejusmodi, ut termini quivis, sive eorum exponentes sint numeri integri sive fracti, inde exacte inveniri queant, quatenus scilicet rei natura permittit. Evenire enim solet, ut inventio terminorum intermediorum a quadratura circuli pendeat, vel a logarithmis, vel alius cujuspiam curvae quadratura. Neque vero termini generales, qui adhuc in usu fuerunt, hisce de quibus loquor, praestant, verum utriusque generis aeque facilis est usus. Pro hac quidem serie $\overset{1}{1}\,.\,\overset{2}{2}\,.\,\overset{3}{6}\,.\,\overset{4}{24}\,.\,\overset{5}{120}$ etc. terminum generalem nondum inveni, sed pro innumerabilibus aliis similibus; unde id tamen assecutus sum, ut terminos intermedios, quorum exponentes sunt $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$ etc. reipsa possim determinare. Terminus autem exponentis $\frac{1}{2}$ aequalis inventus est huic $\frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{-1}\,.\,l-1)}$, seu quod huic aequale est, lateri quadrati aequalis circulo, cujus diameter $= 1$. Ex quo perspicuum est, naturam rei non permittere, ut is numeris exprimatur. Sed ex ratione radii ad peripheriam quasi data, terminum, cujus exponens est $\frac{1}{2}$, inveni hunc 0,8862269. Qui si multiplicetur per $\frac{3}{2}$, habebitur terminus cujus exponens $\frac{3}{2}$, hic 1,3293403. Porro hic ductus in $\frac{5}{2}$ dabit terminum cujus exponens est $\frac{5}{2}$ et ita porro. Possum etiam dare eos terminos, quorum exponentes sunt $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{7}{4}$ etc. Tum ex his, quorum exponentes sunt $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$ etc. Sed horum determinatio ab altioribus pendet quadraturis. Ex regula principio data quaesivi quoque terminum exponentis $\frac{1}{2}$, et sumendis 15 factoribus eum inveni 0,8932, qui aliquanto major est vero. Serierum jam, quarum habeo terminos generales, quasdam hic apponam, quo judicare possis, Vir Celeberrime, quam late pateat mea methodus. Primum hujus seriei: $\overset{1}{\frac{2}{3}}$, $\overset{2}{\frac{2.4}{3.5}}$, $\overset{3}{\frac{2.4.6}{3.5.7}}$, $\overset{4}{\frac{2.4.6.8}{3.5.7.9}}$ etc. inventum habeo terminum generalem, ex quo terminos exponentium $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$ etc. inveni utique sequuntur. Significet $p:d$ rationem peripheriae ad diametrum, quo posito erit $\overset{\frac{1}{2}}{\frac{1.p}{2.2d}}$, $\overset{1\frac{1}{2}}{\frac{1.3.p}{2.4.2d}}$, $\overset{2\frac{1}{2}}{\frac{1.3.5.p}{2.4.6.2d}}$ etc. Aliae series, quarum terminos generales reperi, sunt $\frac{1}{2}$, $\frac{2.4}{3.5}$, $\frac{3.6.9}{4.7.10}$, $\frac{4.8.12.16}{5.9.13.17}$, $\frac{5.10.15.20.25}{6.11.16.21.26}$ etc. et $\frac{1}{2}$, $\frac{1.2}{3.4}$, $\frac{1.2.3}{4.5.6}$, $\frac{1.2.3.4}{5.6.7.8}$ etc. nec non 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{11}{6}$, $\frac{50}{24}$, $\frac{274}{120}$, $\frac{1764}{720}$ etc. Harum duae priores quam teneant legem, ex inspectione intelligetur, tertia vero, cujus lex minus clare apparet, est summatoria progressionis harmonicae 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ etc. Ex ejus, quem habeo, termino generali, inveni terminum cujus index est $-\frac{1}{2}$ hunc $-2l2$. Terminus vero cujus exponens $\frac{1}{2}$, est $2-2l2$. Is cujus exponens $1\frac{1}{2}$, est $2+\frac{2}{3}-2l2$, tum ille cujus exponens $2\frac{1}{2}$, est $2+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}-2l2$, et ita porro. Significet

vero $l2$ logarithmum hyperbolicum binarii qui est $=$ 0,69314718056. Quae cum ita se habeant, ut termini generales tot quadraturas comprehendere debeant, intelligitur eorum inventionem a calculo infinitesimali peti oportere. Id ergo hac in re praestiti, ut calculum differentialem et integralem seriebus tractandis accomodaverim. Quem usum novum, etsi ob temporis brevitatem nondum magis excolere potui, spero adhuc ampliorem fore. Tu igitur, Vir Celeberrime, qui hanc de seriebus doctrinam jam tot tantisque inventis auxisti, judicabis, quid a novo hoc circa series versandi modo amplius expectandum sit. Maxima vero certe utilitas atque perfectio acquiretur, si Ipse, quomodo quam commodissime calculo differentiali hac in re uti conveniat, inquirere dignaberis. Hoc enim adhuc mea methodus laborat incommodo, quod id non invenire possim, quod volo, sed id velle debeam, quod invenio.

Vale et fave Tui observantissimo

Eulero.