terminus generalis est $\frac{x}{x+1} \cdot \frac{2x}{2x+1} \cdot \frac{3x}{3x+1} \cdots \frac{mx}{mx+1}$ donec m fiat $= x$, quod si nusquam contingat, erunt factores numero infiniti; sic terminus respondens exponenti $\frac{1}{2}$ fit $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{6} \cdot$ etc.

Seriei $\frac{2}{3} + \frac{2.4}{3.5} + \frac{2.4.6}{3.5.7} + \frac{2.4.6.8}{3.5.7.9} +$ etc. terminus generalis est

$$\frac{2(2n+3)}{3(2n+2)} \cdot \frac{4(2n+5)}{5(2n+4)} \cdot \frac{6(2n+7)}{7(2n+6)} \cdot \frac{8(2n+9)}{9(2n+8)} \cdot \text{etc.}$$

Seriei $\frac{1}{2} + \frac{1.2}{3.4} + \frac{1.2.3}{4.5.6} + \frac{1.2.3.4}{5.6.7.8} +$ etc. terminus generalis est

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2(4n+2)}{6(n+1)} \cdot \frac{3(4n+6)}{10(n+2)} \cdot \frac{4(4n+10)}{14(n+3)} \cdot \frac{5(4n+14)}{18(n+4)} \cdot \text{etc.}\right)$$

neque adeo difficile est assumere numeros quadraturam circuli exprimentes, aliunde jam cognitos et pro iisdem series concinnare, quarum terminos medios hi numeri constituant, cujus artificii mihi probe gnarus videris.

Caeterum egregias plane judico methodos, quarum specimina mecum communicasti, neque dubito quin iisdem vestigiis progrediens multa nova et praeclara in hoc genere reperturus sis; nisi ego quoque nuper ad Cl. Bernoullium nostrum theorema, quo methodum summandi series ad calculum quem vocant integralem accomodavi. Vale.

Goldbach.

P. S. Notane Tibi est Fermatii observatio omnes numeros hujus formulae $2^{2^{x-1}}+1$, nempe 3, 5, 17, etc. esse primos, quam tamen ipse fatebatur se demonstrare non posse, et post eum nemo, quod sciam, demonstravit.

LETTRE III.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Usage du calcul intégral dans la recherche des termes généraux des suites. Digression sur la théorie des logarithmes et les logarithmes hyperboliques. Sur le théorème de Fermat de la lettre précédente.

Vir Celeberrime, Petropoli d. 8 Januar 1750.

Quae nuper de methodo mea progressionum terminos medios ex quadraturis inveniendi scripsi, ea non ope serierum infinitarum terminos illos exprimentium perficio, maxime enim arduum esse arbitror de quaque serie infinita, ad quam pertineat quadraturam, pronunciare; quanquam non negem, me primo ex serie terminum generalem progressionis $1+2+6+24+$ etc. exhibente, quam Tibi, Vir Celeberrime, perscripsi, conclusisse terminum ordine $\frac{1}{2}$ a quadratura circuli pendere. Deinde autem eodem modo circa alias progressiones versari diffidens id meditatus sum, quomodo alia via eodem pervenire possem, quae non seriebus dignoscendis contineatur. In aliam igitur atque novam incidi rationem progressionum terminis generalibus denotandarum. Ea in hoc consistit, ut formulas integrales in terminos generales recipiam. Ad hoc autem adductus sum considerans ad ea, quae a communi algebra perfici non possent, analysin infinitorum plerumque facilem praebere aditum. Sed termini hujusmodi generales toties consuetam induunt formam, quoties formulae illae integrales algebraice exprimi possunt, quibus in casibus progressionis omnes termini, sive exponentes sint numeri fracti, sive integri, algebraice exhibentur. Quando vero illae formulae integrationem universaliter non admittunt, omnes termini algebraice exponi nequeunt, sed quidam a quadraturis curvarum pendebunt, quae inde cognoscuntur. Cum igitur in nonnullis seriebus observassem terminos quosdam medios a quadratura circuli pendere, in earum terminis generalibus necessario formulae integrales inesse debere visae sunt. Sequenti autem modo hujusmodi formulis integralibus utor. Quando dico seriei cujuspiam terminum generalem esse $\int P dx$, intelligi oportet ex eo terminum quemcunque indicis n inveniri posse. Indicat vero hic P functionem quandam ex x et constantibus quantitatibus una cum n indice compositam; refero scilicet n ad constantes, ut unica variabilis x adsit. Jam $\int P dx$ hoc modo dat terminum n^{mum}. Integretur $\int P dx$ vel reipsa, si fieri potest, vel ad quadraturam curvae convenientis referatur; tanta autem constans adjiciatur, ut totum evanescat posito $x = 0$. Deinde ponatur $x =$ constanti cuidam quantitati (in sequentibus semper pono $x = 1$), habebitur functio quaedam quantitatum constantium et indicis n, quae erit ipse terminus n^{tus}. Fieri nunc potest, praecipue si n in exponentes

ingrediatur, ut positis loco n certis numeris, formula integrari possit, secus vero si alii substituantur. Quo fit, ut alii termini algebraice seu in numeris exprimi queunt, alii a quadraturis pendeant. Ut terminum generalem reperi hunc $\frac{2n+3}{2}\int dx(1-x)^n\sqrt{x}$ progressionis istius $\frac{2}{3}+\frac{2.4}{3.5}+\frac{2.4.6}{3.5.7}+$ etc. Qui quomodo congruat, ut appareat, sit $n = 2$, habebitur $\frac{7}{2}\int dx\,(1-x)^2\sqrt{x} = \frac{7}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{14}{5}x^{\frac{5}{2}} + x^{\frac{7}{2}}$; ponatur $x = 1$, orietur terminus secundus $= \frac{7}{3} - \frac{14}{5} + 1 = \frac{8}{15}$. Idem hic terminus generalis omnes terminos medios suppeditat, ut sit $n = \frac{1}{2}$, erit $2\int dx\sqrt{(x-xx)}$ terminus quaesitus. Sed $2\int dx\sqrt{(x-xx)}$ exhibet segmentum circuli, cujus sagitta est x, radio existente $\frac{1}{2}$, seu diametro 1. Ponatur $x = 1$, erit terminus ordine $\frac{1}{2}$ aequalis areae circuli, cujus diameter $= 1$. Similiter alii termini medii determinantur. Hujusmodi terminos generales omnium earum progressionum, quarum mentionem feci, aliarumque infinitarum similium dare possum. Quousque autem haec methodus pateat ut possis cognoscere, Vir Celeberrime, generaliora hic adjungo. Fundamenti loco mihi fere fuit haec progressio $1 + 1.2 + 1.2.3 +$ etc., cujus terminus generalis mihi inventus est $\int dx(-lx)^n$. Nimirum sumto integrali positoque $x = 1$, prodit terminus cujus index est $\frac{1}{2}$. Denotat autem lx logarithmum hyperbolicum ipsius x. Antequam vero ostendam, quomodo haec formula progressioni satisfaciat, explicabo, quod Te non satis perspicere innuis, quo differant logarithmi hyperbolici ab ordinariis. Si constituatur progressio geometrica

$$A\,..\,1,\quad a,\quad a^2,\quad a^3,\quad a^4,\quad a^5,\quad \text{etc.}$$

eique subscribatur arithmetica

$$B\,..\,b,\ b+c,\ b+2c,\ b+3c,\ b+4c,\ b+5c,\ \text{etc.}$$

habebit quilibet terminus progressionis A sive eorum qui adsunt, sive interpolatorum respondentem in progressione B. Hi termini progressionis B respondentium terminorum in progressione A vocantur logarithmi. Jam cum innumerabiles progressiones arithmeticae subscribi possint, perspicuum est innumerabilia dari systemata logarithmorum. In vulgari systemate, quorum tabulae a Briggio et Vlacquio computatae habentur, loco seriei geometricae A posuerunt $1, 10, 100, 1000$ etc. et loco arithmeticae sumserunt hanc $0, 1, 2, 3, 4$ etc. ita ut logarithmus unitatis sit 0, denarii 1 etc. Ex hoc intelligitur, ad systema quodpiam logarithmorum condendum, duorum quorundam numerorum logarithmos pro lubitu accipi posse, e quibus deinde omnium numerorum logarithmi determinantur. Ita in systemate logarithmorum hyperbolicorum etiam pro logarithmo unitatis ponitur 0, et pro numero qui unitatem quantitate infinite parva superat, ut $1+dz$ assumitur logarithmus hoc ipsum dz. Vel series A est

$$1,\ (1+dz),\ (1+dz)^2,\ (1+dz)^3\ \text{etc.}$$

et series B logarithmos continens est

$$0,\quad dz,\quad 2dz,\quad 3dz\quad \text{etc.}$$

Logarithmi ex hac positione deducti sunt ii qui vocantur hyperbolici, eo quod iidem sint, ac illi qui ex quadratura hyperbolae eruuntur. In hoc systemate est logarithmus binarii 0,693147180559945 et logarithmus denarii est 2,302585092994045 ut ipse calculo aliquoties repetito inveni. Sin autem acciderit, ut logarithmis hyperbolicis uti oporteat,

non quidem necesse est tabulam eorum ad manus habere, sed Vlacquiani in usum vocari possunt dummodo singuli logarithmi per 2,302585 etc. multiplicentur. Semper autem, quando in calculo infinitesimali de logarithmis sermo est, hyperbolici intelliguntur. Et hanc ob rem in termino generali $\int dx(-lx)^n$, l designat logarithmum hyperbolicum. Ut nunc appareat, quomodo haec formula quemvis terminum praebeat, sit $n=3$, habebitur $\int dx(-lx)^3 = -x(lx)^3 + 3x(lx)^2 - 6xlx + 6x$; constantis additione opus non est. Ponatur ergo $x=1$: proveniet terminus tertius $=6$. Omnes enim termini in quibus est lx evanescent, quia $l1=0$. Simili modo omnes termini numeros integros habentes eruuntur. Sed qui valor sit eorum, quorum indices sunt numeri fracti, id difficilius eruitur. Deducit enim ad quadraturas curvarum transcendentium, ut terminus ordine $\frac{1}{2}$ determinatur a quadratura curvae, ad quam est $yy+lx=0$, cum tamen eundem ante a quadratura circuli pendere deprehenderim. Verum tamen alia mihi insuper est methodus eosdem terminos ad curvarum algebraicarum quadraturas reducendi, quae hoc theoremate continetur: Terminus, cujus index est $p:q$, aequalis est

$$\sqrt[q]{(1.2.3\ldots p)\left[\left(\frac{2p}{q}+1\right)\left(\frac{3p}{q}+1\right)\left(\frac{4p}{q}+1\right)\cdots\left(\frac{qp}{q}+1\right)\right]}\cdot$$

$$\left[\left(\int dx(x-xx)^{\frac{p}{q}}\right)\left(\int dx(xx-x^3)^{\frac{p}{q}}\right)\cdots\left(\int dx(x^{q-1}-x^q)^{\frac{p}{q}}\right)\right]$$

quae expressio aequivalet huic $\int dx(-lx)^{\frac{p}{q}}$. Ponatur ex. gr. $p=1$ et $q=2$ ut terminus ordine $\frac{1}{2}$ inveniatur, abibit forma generalis in $\sqrt[2]{1.2}\int dx\sqrt{(x-xx)}$; sed jam ostensum est $2\int dx\sqrt{(x-xx)}$ dare aream circuli diametri 1, quare in serie $1+1.2+1.2.3+1.2.3.4+$ etc. terminus cujus index est $\frac{1}{2}$ aequalis est radici quadratae ex circulo cujus diameter est 1. Cum igitur $\int dx(-lx)^n$ sit terminus generalis, seu terminus ordine n hujus seriei, habeo $\int dx(-lx)^n = 1.2.3...n$, quod in serierum hanc includentium terminis generalibus inveniendis magni est momenti. Nec minus hoc

$m.\overline{m+1}.\overline{m+2}\ldots\overline{m+n} = \frac{\int dx(-lx)^{m+n}}{\int dx(-lx)^{m-1}}$. Maxime universale et latissime patens est hoc theorema

$$(f+g)(f+2g)(f+3g)\ldots(f+ng) = \frac{g^{n+1}\int dx(-lx)^n}{(f+(n+1)g)\int x^{f:g}dx(1-x)^n}$$

unde facile fluit hoc:

$$\frac{(f+g)(f+2g)\ldots.(f+ng)}{(h+k)(h+2k)\ldots.(h+nk)} = \frac{g^{n+1}(h+(n+1)k)\int x^{h:k}dx\,(1-x)^n}{k^{n+1}(f+(n+1)g)\int x^{f:g}dx\,(1-x)^n}$$

Ex hoc theoremate facile est invenire omnium hujusmodi serierum, quarum termini sunt facta, in quae ingrediuntur quantitates in arithmetica progressione progredientes, terminos generales. Ut proposita sit haec progressio, de qua nuper mentionem feci, $\frac{1}{2}+\frac{2.4}{3.5}+\frac{3.6.9}{4.7.10}+$ etc.

Hujus terminus ordine n est

$$\frac{n.2n.3n\ldots nn}{(n+1)(2n+1)(3n+1)\ldots(nn+1)}.$$

Hunc comparo cum

$$\frac{(f+g)(f+2g)(f+3g)\ldots(f+ng)}{(h+k)(h+2k)(h+3k)\ldots(h+nk)}$$

quae formula ut in illam transmutetur, oportet sit $f=0$, $g=n$ et $h=1$, $k=n$. His valoribus substitutis prodit

$$\frac{n.2n.3n\ldots.nn}{(n+1)(2n+1)(3n+1)\ldots.(nn+1)} = \frac{(1+n+nn)\int x^{\frac{1}{n}}dx\,(1-x)^n}{(nn+n)\,d\int x\,(1-x)^n}$$

id quod est terminus generalis progressionis propositae. Est autem $dx\,(1-x)^n$ integrabile, integrale enim est $C-\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}$. Constans C debet esse $=\frac{1}{n+1}$, ut posito $x=0$, totum evanescat. Ponatur nunc $x=1$, ut principio monui, prodibit C seu $\frac{1}{n+1}$, est igitur $(nn+n)\int dx\,(1-x)^n = n$, et ideo terminus generalis seriei propositae hanc habet formam

$$\left(\frac{1+n+nn}{n}\right)\int x^{\frac{1}{n}}dx\,(1-x)^n.$$

Sit $n=3$, ut terminus tertius $\frac{3.6.9}{4.7.10}$ prodeat; habebitur

$$\frac{13}{3}\int x^{\frac{1}{3}}dx\,(1-x)^3 = \frac{13}{4}x^{\frac{4}{3}} - \frac{39}{7}x^{\frac{7}{3}} + \frac{39}{10}x^{\frac{10}{3}} - x^{\frac{13}{3}},$$

ponatur $x=1$, habebitur $\frac{13}{4}-\frac{39}{7}+\frac{39}{10}-1=\frac{162}{280}=$ termino tertio. Quaero terminum ordine $\frac{1}{2}$; fiat ergo $n=\frac{1}{2}$, habebitur

$$\frac{7}{2}\int xx\,dx(1-x)^{\frac{1}{2}} = C-\frac{3}{7}(1-x)^{\frac{3}{2}}+\frac{14}{5}(1-x)^{\frac{5}{2}}-(1-x)^{\frac{7}{2}}.$$

Ergo C est $=\frac{7}{3}-\frac{14}{5}+1$. Ponatur $x=1$, restabit solum C, seu $\frac{7}{3}-\frac{14}{5}+1=\frac{8}{15}$. Algebraice ergo hic terminus ordine $\frac{1}{2}$ dari potest, nec non ii, quorum indices sunt $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ etc. omnes numeris exprimi possunt; qui autem quanti sint, alio modo vix fortasse inveniri posset. Hic autem observo hunc terminum ordine $\frac{1}{2}$ aequalem esse termino ordine 2, et generaliter terminus ordine $\frac{1}{n}$ aequalis est termino ordine n. Haec fere constituunt unum genus progressionum, ad quod mea methodus deduxit; multa quoque ejus ope in seriebus summandis detexi, et praecipue terminis summatoriis inveniendis omnium earum progressionum, in quarum terminis generalibus exponens vel index in denominatorem ingreditur, ut in progressione harmonica. Sed de his alio tempore, si placuerit, scripturus sum.

Nihil prorsus invenire potui, quod ad Fermatianam observationem spectaret. Sed nondum prorsus persuasus sum, quomodo sola inductione id inferre legitime potuerit, cum certus sim ipsum numeris in formula 2^{2^x} loco x substituendis nec ad senarium quidem pervenisse. — Haec igitur benevole accipias enixe rogo et favere pergas, Vir Celeberrime, Tibi obstrictissimo

Eulero.

LETTRE IV.

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Sur la méthode d'Euler pour trouver les termes généraux des suites. Sur le théorème de Fermat.

Moscuae 22 Maii 1730.

Egregia Teque auctore digna judico quae secundis litteris mecum de terminis generalibus serierum communicasti; hoc tantum in methodo Tua cavendum mihi videtur, ne assumta integralis $\int P\,dx$ utrovis modo, hoc est, tam posita $x = 0$, quam posita $x = 1$, in nihilum abeat. Deinde sponte moneo, terminum generalem seriei $\frac{1}{2} + \frac{2.4}{3.5} + \frac{3.6.9}{4.7.10} +$ etc., quem pro exponentibus non integris dederam, non quadrare, fatendum tamen est terminum generalem ejusmodi

$$\frac{2n+3}{2}\int dx\,(1-x)^n\sqrt{x},$$

ut intelligibilis fiat in seriem infinitam consueto more resolvi