niendis omnium earum progressionum, in quarum terminis generalibus exponens vel index in denominatorem ingreditur, ut in progressione harmonica. Sed de his alio tempore, si placuerit, scripturus sum.

Nihil prorsus invenire potui, quod ad Fermatianam observationem spectaret. Sed nondum prorsus persuasus sum, quomodo sola inductione id inferre legitime potuerit, cum certus sim ipsum numeris in formula 2^{2^x} loco x substituendis nec ad senarium quidem pervenisse. — Haec igitur benevole accipias enixe rogo et favere pergas, Vir Celeberrime, Tibi obstrictissimo

Eulero.

LETTRE IV.

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Sur la méthode d'Euler pour trouver les termes généraux des suites. Sur le théorème de Fermat.

Moscuae 22 Maii 1730.

Egregia Teque auctore digna judico quae secundis litteris mecum de terminis generalibus serierum communicasti; hoc tantum in methodo Tua cavendum mihi videtur, ne assumta integralis $\int P\,dx$ utrovis modo, hoc est, tam posita $x=0$, quam posita $x=1$, in nihilum abeat. Deinde sponte moneo, terminum generalem seriei $\frac{1}{2}+\frac{2.4}{3.5}+\frac{3.6.9}{4.7.10}+$ etc., quem pro exponentibus non integris dederam, non quadrare, fatendum tamen est terminum generalem ejusmodi

$$\frac{2n+3}{2}\int dx\,(1-x)^n\sqrt{x},$$

ut intelligibilis fiat in seriem infinitam consueto more resolvi

*

debere, cujus singuli termini integrati tandem exhibebunt terminum generalem indefinitum, quem etiam sine usu arithmeticae differentialis infinitis modis produci posse constat.

Quod ad Fermatii observationem attinet, Tecum sentio, non credibile videri, eum ad sex terminos illius suae seriei exprimendos progressum fuisse, neque tanto labore opus est ad verisimilitudinem illius observationis; facile enim experimur, divisore quocunque accepto, residua ex terminis ordine, quo sequuntur, divisis in circulum redire; sic v. gr. terminus $2^{2^x}+1$, ubi $x=2$; divisus per 7 relinquit 3, ergo terminus sequens relinquit idem residuum, quod relinquitur ex divisione numeri $(3-1)^2+1$ per 7, nempe residuum 5; terminus hunc sequens idem residuum dabit, quod relinquitur ex divisione numeri $(5-1)^2+1$ per 7 divisi, nempe 3; ergo omnia residua possibilia omnium terminorum seriei divisorum per 7 (ubi scil. quotiens sit >0) sunt vel 3 vel 5. Simili ratione facile apparet nullum terminum seriei Fermatianae dividi posse per numerum <100; sed quidquid sit de Fermatii observatione, hoc certum est, omnem numerum 2^p+1, ubi p non sit $=$ alicui numero 2^n (in quo n est numerus integer affirmativus), esse non primum, cujus quidem divisores facillime inveniuntur. Sic numeri $2^{84}+1$ divisor est 17, numeri $2^{1736}+1$ divisor est 257 etc. Vale.

Goldbach.

LETTRE V.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Recherches ultérieures sur le théorème de Fermat. Formule qui exprime le nombre des diviseurs d'un nombre donné. Chaque nombre est la somme de quatre quarrés. Formule pour la quadrature du cercle de Grégoire à St.-Vincent.

Petropoli die 4 Junii 1730.

Postquam ultimas ad Te misissem litteras, de theoremate Fermatiano diligentius cogitare coepi, idque non tam levi nixum fundamento, quam primum putaveram, perspexi. Quoties enim in 2^n+1 non est n numerus ex progressione geometrica 1, 2, 4, 8, etc., divisores semper, ut ipse, Vir Celeberrime, in postremis litteris monuisti, assignari possunt. Nam si n est numerus impar, binomium 2^n+1, vel etiam generalius a^n+b^n poterit dividi per $a+b$. Si praeterea fuerit n multiplum quodpiam numeri imparis, uti si $n=ki$, denotante i numerum quemcunque imparem, divisor erit a^k+b^k. Quamobrem, cum solae binarii potentiae hanc habeant proprietatem, ut per nullum numerum imparem dividi possint, praeter unitatem, sequitur tum solum binomii a^n+b^n