LETTRE VII.

EULER à GOLDBACH.

SOMAIRE. Recherches ultérieures sur les nombres et les diviseurs.

Petropoli die 25 Junii 1750.

Theorematis Fermatiani veritas quotidie mihi magis elucere videtur, sed tamen demonstrationem ejus nondum sum nactus. Sunt mihi autem nonnullae ejus inventae proprietates, quae fortasse ad demonstrationem conficiendam utiles esse possent. Fiat series cujus terminus generalis est $2^{2^{x-1}}+1$ sequens 3, 5, 17, 257, etc., cujus singuli termini secundum Fermatium sunt numeri primi. Demonstrare autem possum nullum terminum per quemquam praecedentium dividi posse, et praeterea si quis terminus haberet divisorem, sequentium nullum per eundem dividi posse, sed

semper residuum fore 2. Certum igitur ex hoc est, omnes ejus progressionis terminos inter se esse primos, vel duos reperiri non posse, qui communem habeant divisorem.

Quod $aa+1$ sit numerus primus, quoties in $\frac{a\pm n}{nn+1}$ nullus numerus inveniri potest, qui pro n substitutus fractionem mutet in numerum integrum, demonstrare etiam possum hoc modo: Investigo casus, quibus $aa+b$ (pono autem $b<2a+1$) fit numerus primus. Fiet hoc si nullos habet divisores; si haberet autem divisores, ii esse hujus formae $a+m$ et $a-n$, quia igitur $aa+b=(a+m)(a-n)$, erit $n=\frac{ma-b}{a+m}=m-\frac{m^2-b}{a+m}=a-\frac{aa-b}{a+m}$. Quoties ergo nullus numerus inveniri potest, qui loco m substitutus, vel $\frac{ma-b}{a+m}$, vel $\frac{mm+b}{a+m}$, vel $\frac{aa+b}{a+m}$, faciet numerum integrum, toties $aa+b$ non habet divisores, et propterea est numerus primus.

Dicis deinde, Vir Celeberrime, divisorem minimum ipsius $aa+1$, si quos habet divisores, esse hujus formae $nn+1$. Sed puto unitatem pro divisore minimo habere opportere; nam hoc nisi esset, theorema verum non esset. Si enim est $a=34$, erit $aa+1=1157$, cujus minimus divisor est 13. Si $a=76$, erit $aa+1=5777$, cujus minimus divisor est 53. Quanquam autem hi divisores minimi non quidem unitate excedant quadratum, tamen sunt fortasse omnes summae duorum quadratorum.

An $6^{2^x}+1$ sit numerus primus, neque affirmare neque negare possum. De generali formula vero $(2p)^{2^x}+1$ nego, etiamsi p fuerit numerus primus. Nam si $p=5$, $x=2$, habebitur 10001, qui non est primus, sed divisorem habet 73. Neque etiam, quod suspicatus eram, $3^{2^x}+2^{2^x}$ est numerus primus; si enim $x=3$, dividi potest 3^8+2^8 per 17.

Fateor me nullum librum nominare posse, in quo invenerim $2^n - 1$ esse numerum primum, si n est numerus primus. Tamen bene memini, in inveniendis numeris perfectis hoc theorema vulgo in usum vocari. Requiritur enim ad eos inveniendos, ut omnes habeantur casus, quibus $2^n - 1$ est numerus primus.

Theorema, quod quicunque numerus sit summa quatuor quadratorum, demonstrare non possum, neque ipse Fermatius demonstrare se posse affirmat. Tamen rem ad hanc quaestionem reduxi, ut $xx + 7$ in quatuor quadrata resolvatur.

Quadraturam circuli Gregorii a St. Vincentio examinavi eamque ex falso lemmati deductam esse deprehendi. Utique si vera non est, etiamsi adhuc centies propius ad veram accederet, tamen prorsus nihili est aestimanda. Sed si vera esset, egregium sine dubio esset inventum. Approximationem Tuam, Vir Celeb., ad rationem peripheriae ad diametrum, utilissimam esse in praxi existimo.

De theoremate Tuo, quod nullus numerus triangularis 4^{nario} auctus habeat radicem rationalem 8^{vae} vel 10^{mae} dignitatis, cogitans, seriem numerorum triangularium investigavi, qui quaternario aucti faciant quadrata, atque inveni radices numerorum eorum trigonalium sequentem constituere progressionem: $-7, 0, 9, 56, 329$ etc., quae hanc habet proprietatem, ut quivis terminus puta n^{tus} aequalis sit $6\,(n-1)^{\text{mo}} - (n-2)^{\text{mo}} + 2$. Similem legem habet series numerorum, quorum quadrata sunt numeri trigonales, quae haec est: $0, 1, 6, 35, 204$, etc., cujus quivis terminus est septuplum praecedentis, demta summa duorum praecedentium. His vestigiis insistens, universaliter seriem numerorum integrorum dare possum, qui loco x substituti faciunt $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$

quadratum, notus autem esse debet unus casus, quo id fit quadratum.

Cum mihi nuper theorema Fermatianum, quod nullus numerus trigonalis sit biquadratum praeter 1, occurreret, inquirere coepi an $\frac{xx+x}{2}$ prorsus non possit esse biquadratum, nisi sit $x = 1$ vel 0. Posui primo $\frac{xx+x}{2} = p^2x^2$, eritque $x = \frac{1}{2pp-1}$ et $\sqrt{\frac{xx+x}{2}} = \frac{p}{2pp-1}$. Ut autem $\frac{xx+x}{2}$ fiat biquadratum, debebit $\sqrt{\frac{xx+x}{2}}$ denuo esse quadratum. Quadratum ergo esse debet $2p^3 - p$. Ponatur $p = q + 1$, habebitur $2q^3 + 6qq + 5q + 1$. Radix hujus sumatur $1 + \frac{5}{2}q$ erit $2q^3 + 6qq = \frac{25}{4}q^2$. Ergo $q = \frac{1}{8}$, $p = \frac{9}{8}$ et $x = \frac{32}{49}$. Quamobrem numerus trigonalis, cujus radix est $\frac{32}{49}$, erit biquadratum radicis $\frac{6}{7}$. Ex hoc casu jam cognito infiniti alii inveniri possunt. Hoc autem veritatem theorematis non infirmat, cum Fermatius id tantum de numeris integris intelligi velit. — Rogatus sum Tibi nomine Cl. Bernoullii salutem dicere.

Vale et fave, Vir Celeb., Tui observantissimo

Leonh. Eulero.