LETTRE X.

=

Goldbach à Euler.

Sommaire. Réponse à la lettre précédente. Problème de géométrie.

Moscuae d. 9 Oct. 1750.

Numeros, qui dividi possunt in tot quadrata quot a continet unitates, animadverti posse etiam dividi in quotcunque plura quam a, hoc est in quadrata $a+n$, ubi n denotet numerum integrum affirmativum quemcunque. Si igitur verum est numerum quemcunque dividi posse in quadratos quatuor, theorema generalius enunciari poterit: *Numerum quemcunque rationalem dividi posse in quadratos quotcunque plures quam* 3. Omnis vero numerus qui neque duorum neque trium quadratorum summa sit, semper dividi posse videtur non solum

in quatuor quadratos, sed etiam in 1 et tres quadratos, sic v. gr.

$7=1+1+1+4$; $23=1+4+9+9$; $39=1+1+1+36$;
$15=1+1+4+9$; $28=1+9+9+9$; $47=1+1+9+36$;
etc.

neque ullum exemplum contra adferre poteris; sed hujusmodi theoremata non facile demonstrari cum Fermatio fateor.

Series illa Mayeri, quae tribus quatuorve terminis numeros Ludolphinos exhibuit, magni momenti videtur, si isti tres quatuorve termini breviore tempore et describi et in summam colligi possunt, quam quo tempore opus est ad eosdem numeros methodo Ludolphi determinandos, nisi enim id demonstratur, nihil in ejusmodi serie magnopere admirandum est, cum vel ipsa series Leibnitiana pro lubitu in magis convergentem transmutari possit, si v. gr. millenos quosque terminos ejusdem pro singulis terminis alterius seriei sumamus, sed hujusmodi compendio, ut dixi, nihil proficimus, quoniam ad duos terminos seriei magis convergentis describendos et addendos tantum temporis requiritur quantum ad colligendam summam bis mille terminorum seriei minus convergentis.

Innumeros esse quadratos trigonales satis ostendisti et hanc ob causam multo magis memorabile est Fermatii effatum: nullum numerum trigonalem, praeter 1, esse quadrato-quadratum.

Numerum qui, divisus per 9, relinquit 3 vel 6 non habere radicem rationalem, quemadmodum observasti, jam ante plus quam 12 annos ad amicum scripseram. Locus ex epistola excerptus in Supplem. Actor. Lips. legitur.

Quod mea solutio problematis de quadrandis lunulis Tibi probetur pergratum est, quamquam mihi ipsi displicere coepit, postquam non novam, sed a Cl. Dan. Bernoullio in Exercitat. Mathemat. multo ante expositam vidi. Tua solutio mihi imprimis arridet, quod aequationem ad expressiones definitas reducis, quae sane plus habent elegantiae quam series indefinitae. Caeterum quaecunque hujus problematis solutiones excogitentur, totum negotium in eo est, ut ab expressione, quae determinat aream lunulae, removeantur quantitates a circuli quadratura pendentes; igitur jam ante 7 annos, cum primum hujus problematis mentionem in litteris faceret Nicol. Bernoullius p. m. hanc ei solutionem misi:

Sint (Fig. 2.) duo circuli sese intersecantes in A et C; circulus $AGC = \alpha$; $AHC = \beta$; pars circuli $ADCE = \frac{\alpha}{p}$; $ABCF = \frac{\beta}{q}$; triang. $AEC = b$; $ACF = c$; erit segm. $ADC = \frac{\alpha}{p} - b$; $ABC = \frac{\beta}{q} - c$; adeoque lunula $ABCG = \alpha - \frac{\alpha}{p} + b - \frac{\beta}{q} + c$; et ponendo $\alpha - \frac{\alpha}{p} - \frac{\beta}{q} = 0$ (ut scilicet destruantur quantitates quadraturam circuli involventes) erit eadem lunula $ABCG = b + c$.

Occasione problematis Kepleriani de semicirculo CHD (Fig. 3.) ex dato puncto E ita dividendo, ut trilineum CHE sit ad aream semicirculi in ratione data, in alius problematis solutionem incidi:

1. dato radio $AC = 1$,
2. ratione diametri ad peripheriam: 1 ad p,
3. arcus dati ad sinum rectum: $\frac{p}{n}$ ad e,
4. areae trilinei CHE ad aream semicirculi CHD: 1 ad n.

determinare distantiam puncti E a centro A seu lineam $AE = c$ infinitis modis, ita ut sinus HI exprimatur per quantitates p, n, c; postulatur autem solutio, quae determinet lineas AE et HI non per series, sed per expressiones definitas.

Solutio. Sit m numerus arbitrarius, $AE = c =$

$$\frac{2p(1-m)\sqrt{-1}}{n\left[\left(\sqrt{(1-e^2)}+e\sqrt{-1}\right)^m-\left(\sqrt{(1-e^2)}-e\sqrt{-1}\right)\right]^m},$$

erit $HI = \frac{p(1-m)}{nc}$.