LETTRE XI.

=

Euler à Goldbach.

Sommaire. Théorèmes de la théorie des nombres. Formules pour la valeur de π. Intégration de formules irrationelles.

Petropoli die 17 Octobr. 1750.

Quod omnis numerus, qui in tot quadrata, quot a continet unitates, dividi potest, etiam in plura possit dividi, ex eo facile intelligitur, quod quadratus numerus quicunque in duos pluresve quadratos possit distribui. Hoc ergo modo numerus quadratorum, qui junctim sumti numerum datum efficiunt, quousque libuerit potest augeri, non vero diminui. Observavi atque demonstrare possum nullum numerum hac forma contentum $mm(4x+3)$ in duo dividi posse quadrata; neque ullum hujus formae $mm(8x+7)$ esse summam trium quadratorum. An vero omnes reliqui in tria pauciorave dividi possint, non dixerim; neque an omnes

numeri in ea formula contenti in quatuor quadrata possint dividi. Saltem nullum exemplum deprehendere potui. Attamen si verum est aliud theorema ejusdem Fermatii, omnem numerum esse summam trium numerorum trigonalium, et hoc inde sequitur omnem numerum $mm(8x+7)$ esse summam quatuor quadratorum. Vi enim illius theorematis omnes numeri comprehenduntur in ista formula $\frac{aa+a}{2}+\frac{bb+b}{2}+\frac{cc+c}{2}$. Propterea hujus octuplum $4aa+4a+4bb+4b+4cc+4c$ complectitur omnia multipla octonarii, seu omnes numeros hujus formae $8x$. Consequenter haec formula $(2a+1)^2+(2b+1)^2+(2c+1)^2$ continet omnes numeros hujus formae $8x+3$. Quocirca omnes numeri $8x+3$ sunt summae trium quadratorum. Hanc ob rem omnes numeri formae $8x+4$ vel hujus $8x+7$ sunt in quatuor quadrata resolubiles. Porroque et hi $mm(8x+4)$ atque $mm(8x+7)$. Formula $mm(8x+4)$ aequivalet huic $mm(2x+1)$. Ex hac formula excluduntur omnes numeri impariter pares, iique soli; i. e. numeri formae istius $4x+2$. Etiamsi ergo verum esset Fermatii theorema de numeris trigonalibus, tamen ad veritatem nostri ostendendam necesse insuper est demonstrare omnes numeros $4x+2$ in quatuor quadrata esse resolubiles. Quod attinet ad observationem, omnem numerum in quatuor saltem quadrata divisibilem dividi posse in unitatem et tria quadrata, sive quod eodem redit, si a tali numero unitas auferatur, residuum semper in tria quadrata distribui posset. Haec proprietas utique in omnibus numeris centenario minoribus locum habet, sed numerorum majorum innumerabilia exempla in contrarium afferre possum, cujusmodi est 112, qui numerus quanquam in pauciora quam 4 quadrata dividi nequit, tamen effici non potest, ut unitas in illis quatuor quadratis reperiatur. Nam 111 nunquam in tria quadrata dividetur. Eandem proprietatem habent omnes numeri hac forma contenti $16nn(8x+7)$, neque enim hi neque unitate mulctati in tria vel pauciora quadrata possunt dividi. Numeris autem $16nn(8x+7)$ in quatuor quadrata dividendis, non solum effici non potest, ut unitas sed neque ut hujus formae $(2m+1)^2 \frac{nn}{dd}$ quadratum locum in illis quatuor quadratis expleat. Denotat hic d numerum dividentem n. — De altera quaestione, quomodo quam facillime maximi numeri Ludolphi a Ceulen quadraturam circuli dantes inveniri queant, scribam quae ipse meditatus sum, cum manuscripta Mayeri amplius inspicere non liceat. Sit diameter circuli b, chorda quaecunque $= x$ et arcus respondens $= S$, erit

$$S = x + \frac{1.x^3}{2.3.b^2} + \frac{1.3.x^5}{2.4.5.b^4} + \frac{1.3.5.x^7}{2.4.6.7.b^6} + \text{etc.}$$

Haec series eo magis convergit quo minor accipitur x. Sed ut ratio peripheriae ad radium inde possit inveniri, oportet ut S cum tota peripheria ex x cum diametro sit commensurabilis. Ad hoc minor chorda rationalis non adhuc est inventa, quam ea arcus 60 graduum, quae est $= \frac{1}{2}b$. Cum autem hoc casu series nequaquam satis convergat, in id cogitandum est, quomodo expressio finita inveniatur ei quam proxime aequalis. Prope accedit haec $S = \frac{60bbx - 17x^3}{60bb - 27xx}$, propius etiam haec $S = x + \frac{840bbx^3 - 122x^5}{120bb(42bb - 25xx)}$, nec non $S = x + \frac{x^3}{6bb}\left(\frac{420bb}{420bb - 311xx}\right)^{\frac{189}{311}}$. Sed hae omnes, nisi x minor quam $\frac{1}{2}b$ accipi potest, non vehementer admodum ad verum accedunt; propterea maxime consultum erit minorum peripheriae partium chordas, etsi irrationales assumere. Habeo praeterea aliam formulam, qua peripheriam circuli determinare possum. Si diameter ponatur $= 1$, erit peripheria

$$= \frac{16.36.64.100\ldots 4nn}{9.25.49.81\ldots(2n-1)^2} \cdot \frac{8n+2}{2nn+n},$$

vel accuratius

$$\text{peripheria} = 4(1+n)\frac{4.16.36\ldots 4nn}{9.25.49\ldots(2n+1)^2}\sqrt{\frac{2n+2}{2n+3}},$$

quae posterior expressio semper est justo major; hic quo major accipitur n, eo vero propior prodibit peripheria. — Vidi Clarissimum Bernoullium nostrum in litteris ad Te, Vir Celeberrime, datis mentionem fecisse theorematis cujusdam mei, hanc formulam $\frac{adx}{\sqrt[m]{(b+cx^m)}}$ semper posse in rationalem transmutari et propterea integrari. Significavit is mihi Te eam formulam multis modis universaliorem reddidisse. Celeberrimus Bernoullius Pater quoque simile effecit; non solum enim eam, sed hanc $\frac{adx}{\sqrt[m]{(ax^m+bx^n)}}$ ad rationalitatem reduxit. Haec videns cogitare coepi, an non omnes plane formulae hoc modo integrari possint, admissis saltem logarithmis. Nam quia $\frac{dx}{x}$ in $x^m dx$ continetur, quae beneficio logarithmorum integrari possunt, ea pro absolute integrabilibus haberi debent. Nullo autem modo hanc formam $\frac{aadx}{\sqrt{a^4 - x^4)}}$, quae exprimit elementum curvae elasticae rectangulae, integrare potui neque ellipsin rectificare, etiamsi logarithmi admittantur. Nescio autem, an in nulla Tuarum formularum et hae comprehendantur. Vale et fave, Vir Celeb., Tibi obstrictissimo

Eulero.