# LETTRE XII.

## Goldbach à Euler.

Sommaire. Réponse à la dernière partie de la lettre précédente, sur l'intégrabilité des formules irrationelles.

---

Moscuae 6 Nov. 1750.

In ultima epistola Tua miror diligentiam, quam ad indaganda numerorum mysteria adhibes. Revidi quae ad Celeb. Bernoullium de formula differentiali cujus mentionem facis scripseram, atque illico animadverti casus illos rationales multo brevius quam putaram expediri posse. Praemonendum autem duco formulam $A \ldots \frac{dx}{(x^m + x^n)^{\frac{1}{m}}}$ nihilo generaliorem esse formula $B \ldots \frac{dv}{(v^m + 1)^{\frac{1}{m}}}$, cum per solam substitutionem $x = v^{\frac{m}{m-n}}$ ex $A$ producatur $B$, quod etiam agnovit Clar.



Daniel Bernoullius. Considerabo jam differentialem hujus formae $C \ldots (1 + x^{\frac{1}{n}})^p\, dx$ (ubi $p$ sit numerus rationalis non integer), quam dico rationalem fieri si $n$ sit numerus integer quicunque; ponatur enim $x = (z - 1)^n$, mutabitur $C$ in $D \ldots n(z-1)^{n-1} z^p\, dz$, quam apparet fieri rationalem si $n$ sit numerus quicunque integer. Si vero ponatur $z = v(v-1)^{-1}$, migrabit $D$ in $E \ldots -n(v-1)^{-n-p-1} v^p\, dv$, quae ad terminos rationales redigi potest, si $-n-p$ sit numerus integer quicunque. Memorabilis haec est convenientia casuum integrabilium et rationabilium (ut sic loquar), illi enim numerum $n$ vel $-n-p$ integrum affirmativum, hi saltem integrum postulant. Vale.

Goldbach.

---

*Note marginale d'Euler:* $\frac{dx}{\sqrt[m]{(bx^m + ax^n)}}$ fit rationale, si ponatur $(b + ax^{n-m})^{\frac{1}{m}} = z$; $\frac{dx}{x^p \sqrt[m]{(1 + x^{-n})}}$ est integrabile, si $p - 1$ dividi potest per $n$.