LETTRE XIII.

=

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Réduction des formules différentielles irrationelles a la rationalité Théorème général pour l'intégration des formules rationelles.

Petropoli die 9 Novembris A. 1750.

Omnis formula differentialis rationalis hanc habet proprietatem, ut ejus integratio reduci possit ad integrationem hujus $x^m dx$. Quam ob rem si $x^m dx$ pro absolute integrabili habemus, enunciare possumus, omnes formulas rationales esse integrabiles. Cum autem, si $m = -1$, integrale ipsius $x^{-1}dx$ sit lx, cujusmodi expressiones in algebraicis non habemus; si eas tantum formulas integrabiles esse censeamus, quae dant integralia algebraica, oportet superiorem propositionem quodammodo restringi, hocque modo enunciari, ut omnes formulae differentiales, quae in rationales transmutari pos-

sunt, integrabiles esse dicantur, iis exceptis, quae a logarithmis pendent. Atque ex hoc ortum suum habet magna ea convenientia casuum integrabilium et rationalium, quam in postremis litteris annotasti. Nescio autem, cur eas formulas, quae a logarithmis pendent, non pro integrabilibus habere velimus. Haec ratio sane non sufficit, quod aeque difficile sit dicere quod sit lx atque $dx : x$. Similis mihi videtur differentia, quae est inter $\int 2x dx$ et x^2. Deinde demonstratum est quantitatibus logarithmicis aequales algebraicas dari non posse; et propterea ad quasque quantitates exprimendas logarithmi aeque sunt necessarii ac algebraicae quantitates, et si formulam integrando ad logarithmos perduxerimus aeque contenti esse debemus, ac si ad algebraicas esset reducta. Admissis igitur logarithmis tanquam quantitatibus in $\int x^m dx$ contentis, omnes formulae differentiales rationales sunt integrabiles, omnesque irrationales, quae in rationales transmutari possunt. Maximam ergo habet utilitatem cura et studium, quod ponitur in reducendis formulis irrationalibus ad rationales. Ex eo autem, quod omnes formulae rationales ad $x^m dx$ possunt reduci, forte suspicari licet, omnes prorsus formulas differentiales eo reduci posse, vel omnes prorsus formulas irrationales in rationales transmutari posse. Magnam hujus desiderati inveniendi haberem spem, si quis hanc tantum expressionem $\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$ ad rationalitatem reducere doceret. Formula Tua, V. C., $(1+x^{\frac{1}{n}})^p dx$, quae rationalis redditur, si vel n vel $n+p$ fuerit numerus integer, latissime patet; deprehendi enim complures formulas, quas non putassem, ut $\frac{dx}{\sqrt[m]{(1+x^m)}}$ et $\frac{dx}{\sqrt[m]{(x^n+x^{m+n})}}$ in ea comprehendi. Aequivaletque Tuum hoc theorema sequenti meo, quanquam universalius videatur: $\frac{dz}{\sqrt[m]{(z^p+z^q)}}$ ad rationalitatem reduci potest quoties vel $\frac{p-m}{m(p-q)}$ vel $\frac{q-m}{m(q-p)}$ est numerus rationalis. Ad integrandas autem quascunque formulas rationales theorema sequens inveni:

$$\int \frac{dx(a-x)(b-x)(c-x) \text{ etc.}}{(\alpha+x)(\beta+x)(\gamma+x) \text{ etc.}} = \frac{(\alpha+a)(\alpha+b)(\alpha+c) \text{ etc.}}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\delta-\alpha) \text{ etc.}}\, l\,\frac{x+\alpha}{\alpha} +$$

$$\frac{(\beta+a)(\beta+b)(\beta+c) \text{ etc.}}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)(\delta-\beta) \text{ etc.}}\, l\,\frac{x+\beta}{\beta} + \frac{(\gamma+a)(\gamma+b)(\gamma+c) \text{ etc.}}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\delta-\gamma) \text{ etc.}}\, l\,\frac{x+\gamma}{\gamma} + \text{etc.}$$

$$\pm Ax \mp \frac{Bx^2}{2} \pm \frac{Cx^3}{3} \mp \text{etc.}$$

Horum posteriorum terminorum algebraicorum nullus adest, si (posito numero factorum numeratoris $a-x$, $b-x$, $c-x$ etc. m, et numero factorum denominatoris n) $n=m$ vel $m<n$. Primus tantum Ax locum habet, si $m=n+1$. Duo vero Ax et $\frac{Bx^2}{2}$ sunt adjiciendi si $m=n+2$; tres, si $m=n+3$, et ita porro. Signorum ambiguorum sumentur superiora, si n est numerus par, at inferiora, si n est numerus impar. Litterae vero majusculae, quae valent si $m>n$, sequentes habent valores: A significat summam omnium factorum quae constant ex tot litteris litterarum α, β, γ, δ, etc. et a, b, c, d, etc. quot $m-n$ continet unitates; B significat summam omnium factorum tot habentium factores ex iis litteris desumtos, quot $m-n-1$ continet unitates; C summam omnium factorum, quae habent $m-n-2$ factores etc. Excluduntur autem omnia ea facta in quibus quaepiam latina littera plures quam unam habet dimensiones. Complectitur autem haec generalis formula integrata omnes formulas differentiales rationales. Numerus enim factorum, quam in numeratore tam in denominatore, est arbitrarius. Quod autem in omnibus factoribus x unius tantum sit dimensionis, id universalitati non nocet, omnes enim formulae algebraicae, in quibus x plures habet dimensiones, sunt divisibiles in hujusmodi factores simplices. Denique facile perspicitur id universalitati non obesse, quod x alios coëfficientes nisi $+1$ et -1 non habeat. Vale, V. C., et fave Tui observantissimo

Eulero.