$$\begin{array}{lllll} n = 1 & 2 & 3 & 4 & \\ \frac{1}{s}, & \frac{s}{3rs+1}, & \frac{3rs+1}{15r^2s+5r+s}, & \frac{15r^2s+5r+s}{105r^3s+35r^2+10rs+1}, & \text{etc.} \end{array}$$

in qua serie apparet cujusvis fractionis numeratorem esse praecedentis denominatorem. Atque si terminus ordine m sit $\frac{A}{B}$, fore sequentem indicis $m+1 = \frac{B}{(2m+1)B+A}$. Ex his ergo manifestum est, quod in praecedentibus litteris commemoravi, ex termino generali hujus seriei

$$\overset{m}{A},\ \overset{m+1}{B},\ \overset{m+2}{(2m+1)B+A}$$

cognito haberi formulae Riccatianae separationem et integrationem universalem. In illa autem serie, ut sit determinata, oportet esse terminum primum $= 1$ et secundum $= s$. Cognitis igitur ex termino generali A et B factoque $n = m$, erit

$$x = \left(\frac{p}{2m+1}\right)^{2m+1} \text{ et } y\left(\frac{p}{2m+1}\right)^{2m} = \frac{A}{B},$$

qua substitutione aequatio $ady = y^2dx - x^{\frac{-4m}{2m+1}}dx$ reducitur ad hanc $adq = q^2dp - dp$, ideoque integrabitur ope logarithmorum universaliter. Aequatio vero

$ady = y^2dx - x^{\frac{-4m}{2m+1}}dx$ modo initio tradito reducitur ad hanc

$$z^2dv + vzdz - vzdv - v^2dz + a\left(\frac{-2m+1}{2m+1}\right)zdv - avdz = 0.$$

Haec ergo reducetur ad istam $adq = q^2dp - dp$, substitutione $v = \frac{Ap}{(2m+1)B}$ et $z = \frac{Bp}{(2m+1)A}$. Vale et fave, V. C., Tui observantissimo

Eulero.

LETTRE XVIII.

=

Goldbach à Euler.

Sommaire. Remarque sur les sommes des séries et les intégrales. Solution d'une équation du 5ème degré.

Moscuae $\frac{15}{26}$ Januar. 1732.

In superioribus litteris Tuis non animadverteram Te in formula A, B, $(2m+1)B + A$ sumere m pro exponente terminorum qui comperit termino A, quod ex postremis Tuis nuper ad me datis nunc satis intelligo videoque simili modo $\int(1-y^{\frac{1}{n}})^p dy$ pendere a formula generali summarum seriei, cujus lex progressionis est $\big((p+n+x)\div(n\pm x)\big)A = B$, ubi per x intelligo exponentem qui termino A respondet, per $\div$ vero signum divisionis ambiguae, ita ut sumto ex signis $\pm$ superiore, $n+x$ sit denominator, sumto inferiore, $n-x$ fiat numerator; vel eandem integralem pendere a termino generali summarum seriei, cujus lex progressionis est $\frac{-(n+x-1)(p-x+1)A}{x(n+x)}=B$; sed raro admodum contingere arbitror, ut ad terminum hujusmodi generalem expeditior quam ad ipsam integralem quaesitam via sit.

Casu aliquo nuper observavi ex aequationibus quintae potestatis, quae hanc formam habeat

$$x^5+\frac{5m}{2}x=$$
$$\frac{1}{2}\sqrt{\left(\left(\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p^2}{4}-m^5\right)}\right)^{\frac{1}{5}}-\left(\frac{-p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p^2}{4}-m^5\right)}\right)^{\frac{1}{5}}+4p\right)}$$

quicunque numeri dentur pro m et p, radicem algebraicam erui posse, quod non contemnendum puto, quotiescunque numerus p in aequatione data $x^5+\frac{5m}{2}x=n$, per m et n facile determinari potest. Vale.

Goldbach.

LETTRE XIX.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Solution des équations par approximation. Méthodes de D Bernoulli et de Taylor.

Petropoli d. 31 Januar. 1752.

Occasione aequationis ordinis quinti $x^5+\frac{5m}{2}x=\frac{n}{2}$, cujus radicem Te assignare posse scribis, quoties est

$$n=\sqrt{\left[\left(\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{pp}{4}-m^5\right)}\right)^{\frac{1}{5}}-\left(-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{pp}{4}-m^5\right)}\right)^{\frac{1}{5}}+4p\right]},$$

in qua vero determinatio litterae p etiam ab inventione radicis ex aequatione ordinis quinti pendet, non incongruum arbitror communicare, quae de radicibus aequationum proxime inveniendis observavi. Duos omnino modos ad hoc adhiberi solere perspexi, quorum primus est, quo in pluribus aequationis locis loco incognitae x ponitur quantitas non multum ab ea differens, et tum ipsa x quaeritur, deinde hic pro x inventus valor iterum in aliquot locis pro x scribatur, denuoque x quaeratur. Hujus operationis ope, quo saepius repetitur, eo propior habebitur quantitas ipsius x.

*