termino generali summarum seriei, cujus lex progressionis est $\frac{-(n+x-1)(p-x+1)A}{x(n+x)}=B$; sed raro admodum contingere arbitror, ut ad terminum hujusmodi generalem expeditior quam ad ipsam integralem quaesitam via sit.

Casu aliquo nuper observavi ex aequationibus quintae potestatis, quae hanc formam habeat

$$x^5+\frac{5m}{2}x=$$
$$\frac{1}{2}\sqrt{\left(\left(\frac{p}{2}\pm\sqrt{(\frac{p^2}{4}-m^5)}\right)^{\frac{1}{5}}-\left(\frac{-p}{2}\pm\sqrt{(\frac{p^2}{4}-m^5)}\right)^{\frac{1}{5}}+4p\right)}$$

quicunque numeri dentur pro m et p, radicem algebraicam erui posse, quod non contemnendum puto, quotiescunque numerus p in aequatione data $x^5+\frac{5m}{2}x=n$, per m et n facile determinari potest. Vale.

Goldbach.

LETTRE XIX.

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Solution des équations par approximation. Méthodes de D Bernoulli et de Taylor.

Petropoli d. 31 Januar. 1752.

Occasione aequationis ordinis quinti $x^5+\frac{5m}{2}x=\frac{n}{2}$, cujus radicem Te assignare posse scribis, quoties est

$$n=\sqrt{\left[\left(\frac{p}{2}\pm\sqrt{(\frac{pp}{4}-m^5)}\right)^{\frac{1}{5}}-\left(-\frac{p}{2}\pm\sqrt{(\frac{pp}{4}-m^5)}\right)^{\frac{1}{5}}+4p\right]},$$

in qua vero determinatio litterae p etiam ab inventione radicis ex aequatione ordinis quinti pendet, non incongruum arbitror communicare, quae de radicibus aequationum proxime inveniendis observavi. Duos omnino modos ad hoc adhiberi solere perspexi, quorum primus est, quo in pluribus aequationis locis loco incognitae x ponitur quantitas non multum ab ea differens, et tum ipsa x quaeritur, deinde hic pro x inventus valor iterum in aliquot locis pro x scribatur, denuoque x quaeratur. Hujus operationis ope, quo saepius repetitur, eo propior habebitur quantitas ipsius x.

Ut in aequatione $x^2 = 3x + 20$ ponatur 6 loco x, ut prodeat haec aequatio $x = \frac{3x+20}{x} = 6\frac{1}{3}$, tum fiat $x = 6\frac{1}{3}$, fiet $x = 6\frac{3}{19}$, porroque eodem modo $x = 6\frac{29}{117}$, tandemque admodum exacte x reperietur. Generaliter etiam, si principio ponatur $x = a$, post unam operationem proveniet $x = 3 + \frac{20}{a}$, post duas $x = 3 + \cfrac{20}{3 + \cfrac{20}{a}}$, post tres

$$x = 3 + \cfrac{20}{3 + \cfrac{20}{3 + \cfrac{20}{a}}},$$ atque post infinitas

$$x = 3 + \cfrac{20}{3 + \cfrac{20}{3 + \cfrac{20}{3 + \cfrac{20}{\text{etc.}}}}}$$

Hujus igitur continuarum fractionum quantitatis valor cognoscitur, est nimirum $= \frac{3+\sqrt{89}}{2}$. Hujusmodi etiam est quantitas, quam ad formulam Riccatianam construendam dedi. Hoc etiam modo nititur methodus Cl. Bernoullii nostri, quam dedit ope serierum ut vocat recurrentium radices aequationum admodum prope inveniendi. Ita autem hinc eam derivo: Sit primo aequatio quadratica $x^2 = ax + b$, fiat ex ea $x = a + \frac{b}{x}$, in qua pono esse $x = \frac{q}{p}$ prope, hoc substituto $x = \frac{aq+bp}{q}$ propius, hocque etiam pro x posito habebitur $x = \frac{a^2q+abp+bq}{aq+bp}$ multo denuo propius etc. Ex his ipsius x valoribus formatur facile haec series

$$p,\ q,\ aq+bp,\ a^2q+abp+bq, \text{ etc.}$$

hanc habens proprietatem $A, B, aB+bA$, adeoque recurrens. Si igitur ejus quivis terminus per praecedentem dividitur, quotus dabit valorem ipsi x eo propiorem, quo longius series continuatur. Idem quoque evenit etiamsi pro p et q numeri quicunque assumantur, quo vero magis $\frac{q}{p}$ ab x differt, eo longius series est continuanda. Si fuerit proposita aequatio cubica $x^3 = ax^2 + bx + c$, mutetur ea in $x = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}$. Ad hujus radicem inveniendam pro x assumendi sunt duo valores arbitrarii hujus formae $\frac{q}{p}$ et $\frac{p}{n}$, ex quibus igitur fiet $x^2 = \frac{q}{n}$, prodibit ergo $x = \frac{aq+bp+cn}{q}$. Hinc emergit ista series $n, p, q, aq+bp+cn$, etc. itidem recurrens, et cujus quivis terminus per antecedentem divisus dat x proxime. Simili modo ad aequationis

$$x = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + \frac{d}{x^3}$$

radicem inveniendam servit haec series

$$m,\ n,\ p,\ q,\ aq+bp+cn+dm, \text{ etc.}$$

Compendium hinc ingens nascitur ex eo, quod principio pro x non unus sed plures valores assumuntur, hocque efficitur ut tot sumendis potestatibus non sit opus, ideoque series facile possit continuari. Aliis forte etiam idoneis modis aequationes possunt disponi, et congrui pro x valores assumi ut series prodeat simplicior, ope cujus radix inveniri potest. Alter modus appropinquandi est maxime usitatus, atque in eo continetur, ut primo divinando ipsi x propinquus valor habeatur, tumque complementum ejus quam proxime investigetur. Hoc modo fit aequatio $x^2 = ax + b$, in qua notum sit esse $x = c$ prope. Ponatur ergo $x = c + z$, ubi z valde parvum erit respectu c, ita ut pro x^2 assumi possit $c^2 + 2cz$, erit ergo $c^2 + 2cz = ac + az + b$, adeoque $z = \frac{c^2 - ac - b}{a - 2c}$ et $x = \frac{c^2 + b}{2c - a}$. Si igitur jam pro c substituatur $\frac{c^2+b}{2c-a}$, prodibit multo exactius

$$x = \frac{c^4+6bc^2+b^2-4abc+a^2b}{4c^3+4bc-6ac^2+4a^2c-2ab-a^3}$$

et ita porro. Hanc methodum vehementer amplificavit Cl. Taylor. Aequationem, in qua inest incognita x, reducere jubet ad nihilum, ut prodeat haec forma $X = 0$, ubi X denotat quantitatem quamcunque ex x et cognitis composita. Deinde assumit quantitatem ipsi x propinquam, quae sit z, eamque in X pro x substituit, prodibit ergo quantitas ex z et cognitis composita, quae sit $= y$, namque quia non est $z = x$, etiam haec quae prodit quantitas non esse potest $= 0$. Hoc facto sumantur differentialia positis y et z variabilibus, erit inquit $x = \frac{z\,dy - y\,dz}{dy}$ q. p. quae non solum pro aequationibus algebraicis, sed etiam transcendentibus valet. Ut sit $\sqrt[2]{(7x-xx)} - \sqrt[3]{(9+x^3)} = 0$, ponatur $x = z$; erit $\sqrt[2]{(7z-zz)} - \sqrt[3]{(9+z^3)} = y$, hincque

$$dy = \frac{7dz - 2z\,dz}{2\sqrt[2]{(7z-zz)}} - \frac{zz\,dz}{\sqrt[3]{(9+z^3)^2}}$$

adeoque

$$x = z - \frac{2y\sqrt[2]{(7z-zz)}.\sqrt[3]{(9+z^3)^2}}{(7-2z)\sqrt[3]{(9+z^3)^2} - 2z^2\sqrt{(7z-zz)}};$$

ut ponatur $z = 1$, erit $y = \sqrt{6} - \sqrt[3]{10}$, adeoque

$$x = 1 - \frac{12\sqrt[3]{100}+20\sqrt{6}}{5\sqrt[3]{100}-2\sqrt{6}} = \frac{18\sqrt{6}-7\sqrt[3]{100}}{5\sqrt[3]{100}-2\sqrt{6}}.$$

Accuratius deinde idem pertractat dicitque fore $x = z + v$. At v ex hac aequatione debet determinari

$$y + \frac{v\,dy}{1.dz} + \frac{v^2\,ddy}{1.2.dz^2} + \frac{v^3\,d^3y}{1.2.3.dz^3} + \text{etc.} = 0.$$

Si ex hac aequatione definiri potest v accurate, etiam revera foret $x = z + v$. In secundis vero differentiationibus dz pro constante habetur. Inveni vero esse quam proxime

$$v = \frac{-y\,dz}{dy}\cdot\frac{\frac{-y^2\,dz\,d^2y}{1.2.dy^2} + \frac{y^3\,dz\,d^3y}{1.2.3.dy^3} - \frac{y^4\,dz\,d^4y}{1.2.3.4.dy^4} + \text{etc.}}{dy - \frac{y\,d^2y}{1.dy} + \frac{y^2\,d^3y}{1.2.dy^2} - \frac{y^3\,d^4y}{1.2.3.dy^3} + \text{etc.}}.$$

Sit $x^3 - a = 0$, erit $z^3 - a = y$, et $dy = 3zz\,dz$, $ddy = 6z\,dz^2$ et $d^3y = 6dz^3$ hinc habebitur

$$v = \frac{-y}{3z^2}\cdot\frac{-\frac{y^2}{3z^3}+\frac{y^3}{27z^6}}{3z^2 - \frac{2y}{z} + \frac{y^2}{3z^4}} = \frac{-3yz^2 + \frac{y^2}{2} - \frac{2y^3}{9z^4}}{9z^4 - 6yz + \frac{y^2}{z^2}}$$

atque

$$x = \frac{16z^9 + 51az^6 + 11a^2z^3 + 2a^3}{36z^8 + 36az^5 + 9a^2z^2}.$$

Nimis quidem est operosa haec methodus, si pluries eandem repetere volueris, ponendo iterum loco z, quod pro x jam erat inventum, sed forte etiam compendia poterunt excogitari, quae hanc aeque commodam reddunt, ac priorem methodum. Ad has autem operationes continuandas requiritur series hujus proprietatis $\overset{n}{x}$, $\overset{n+1}{P}$, $\overset{n+2}{X}$, ut X eodem modo determinetur in P, quo P determinatur in x. Nam pro hac aequatione $x^2 = ax + b$ sunt ipsius x valores successive inventi hi

c, $\frac{c^2+b}{2c-a}$, $\frac{c^4-6bc^2+b^2-4abc+a^2b}{4c^3+4bc-6ac^2+4a^2c-2ab-a^3}$, etc. $\cdots A$, $\frac{A^2+b}{2A-a}$.

Inveni autem quomodocunque P detur in x fore

$$X = P + \frac{(P-x)\,dP}{1.dx} + \frac{(P-x)^2\,ddP}{1.2.dx^2} + \frac{(P-x)^3\,d^3P}{1.2.3.dx^3} + \text{etc.}$$

Hujusmodi aequatio etiam dari potest pro curva cujus abscissae si fuerint 1, 2, 3, 4, etc. respondentes applicatae sunt 1, 2, 6, 24, 120, etc., scilicet in aequatione pro ea inerunt differentialia omnium graduum. Vale et fave, V. C.

Tui observantissimo

L. Eulero.