LETTRE XXI.

=

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE Démonstration d'un théorème de géométrie.

Petropoli d. 12 Octobr. 1735.

Hesterni Tui theorematis praeterita nocte hanc demonstrationem imaginatus sum, quam mane veram deprehendi. Dato (Fig. 5.) rectangulo quocunque ADC, ducatur indefinita AF perpendicularis ipsi AC, ex qua abscindatur $AB = AD$. Si ex puncto C ducatur quaevis $CE = CD$ et ex E erigatur perpendicularis occurrens ipsi AF in F, dico esse $EF = BF$. Sit $AB = AD = a$, $CD = CE = b$, $AC = \sqrt{(a^2 + b^2)} = f$, $AF = e$, $AI = x$. Erit
$AF:AI::CE:EI = \frac{bx}{e}$; $AF:FI::CE:CI = \frac{b\sqrt{(e^2+x^2)}}{e} = f - x$,
ergo $x = \frac{e^2 f \pm e\sqrt{(e^2f^2 + (b^2-f^2)(e^2-b^2))}}{e^2 - b^2}$; ergo $FE = FI + IE =$
$\sqrt{(e^2 + x^2)} + \frac{bx}{e} = \sqrt{(a^2 + e^2)} = FB$.
Ex quo patet, cum puncta E et F sint arbitraria, circulum quemcunque ductum radio FE ad angulos rectos secari per circulum ductum radio CE.

Goldbach.

LETTRE XXII.

=

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Solution d'un problème de géométrie.

.... d. Febr. 1736.

Problema mecum communicatum: Datis in quadrilatero (Fig. 6.) $ABCD$ omnibus lateribus et altera diagonali AC, invenire alteram diagonalem BD, sic solvi posse puto: Sit $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $BD = y$. Quoniam data diagonali alterutra datur etiam area quadrilateri, quem pono $= \frac{e}{4}$,

erit $\left(-(a^2 - b^2)^2 + 2(a^2 + b^2)y^2 - y^4\right)^{\frac{1}{2}} +$

$$\left(-(c^2 - d^2)^2 + 2(c^2 + d^2)y^2 - y^4\right)^{\frac{1}{2}} = e.$$

Unde positis $-(a^2 - b^2)^2 = \alpha$, $+2(a^2 + b^2) = \beta$, $-(c^2 - d^2)^2 = \gamma$, $+2(c^2 + d^2) = \delta$ et

$$\frac{2e^2\delta-(\alpha-\gamma-e^2)(\beta-\delta)}{(\beta-\delta)^2+4e^2}=\pi,\quad \frac{4e^2\gamma-(\alpha-\gamma-e^2)^2}{(\beta-\delta)^2+4e^2}=\tau$$

pervenitur ad duplicem valorem $y=(\pi\pm\sqrt{(\pi^2+\tau)})^{\frac{1}{2}}$, altero diagonalem datam AC, altero quaesitam BD exprimente.

Aliter: Quoniam datis quatuor lateribus et diagonali AC dantur etiam perpendiculares ad diagonalem $BE=f$, $DF=g$ et intercepta $FE=h$, erit diagonalis quaesita

$$BD=\sqrt{((f+g)^2+h^2)}.$$

Goldbach.

LETTRE XXIII.

═

Euler à Goldbach.

Sommaire. Recherches de géométrie analytique.

Petropoli die 23 Julii A. 1737.

Cum in hesternam formulam, quam mecum communicare voluisti, diligentius essem meditatus, incidi in sequentes expressiones non solum satis generales, sed etiam perquam commodas, ex quibus omnes Tuae formulae, V. C., expedite derivari queant. Posita scilicet abscissa communi $=x$, sint utriusque curvae applicatarum elementa

$$dx\,(\sqrt{RS}\pm\sqrt{(R+1)(S-1)})$$

unde ipsarum curvarum elementa erunt

$$dx\,(\sqrt{(R+1)S}\pm\sqrt{R(S-1)}).$$

Quo igitur utraque curva fiat algebraica pro R et S, tales ipsius x accipiendae erunt functiones, ut tam $dx\sqrt{RS}$ quam