$$\frac{2e^2\delta-(\alpha-\gamma-e^2)(\beta-\delta)}{(\beta-\delta)^2+4e^2}=\pi,\quad \frac{4e^2\gamma-(\alpha-\gamma-e^2)^2}{(\beta-\delta)^2+4e^2}=\tau$$

pervenitur ad duplicem valorem $y=(\pi\pm\sqrt{(\pi^2+\tau)})^{\frac{1}{2}}$, altero diagonalem datam AC, altero quaesitam BD exprimente.

Aliter: Quoniam datis quatuor lateribus et diagonali AC dantur etiam perpendiculares ad diagonalem $BE=f$, $DF=g$ et intercepta $FE=h$, erit diagonalis quaesita

$$BD=\sqrt{((f+g)^2+h^2)}.$$

Goldbach.

LETTRE XXIII.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Recherches de géométrie analytique.

Petropoli die 28 Julii A. 1737.

Cum in hesternam formulam, quam mecum communicare voluisti, diligentius essem meditatus, incidi in sequentes expressiones non solum satis generales, sed etiam perquam commodas, ex quibus omnes Tuae formulae, V. C., expedite derivari queant. Posita scilicet abscissa communi $=x$, sint utriusque curvae applicatarum elementa

$$dx\left(\sqrt{RS}\pm\sqrt{(R+1)(S-1)}\right)$$

unde ipsarum curvarum elementa erunt

$$dx\left(\sqrt{(R+1)S}\pm\sqrt{R(S-1)}\right).$$

Quo igitur utraque curva fiat algebraica pro R et S, tales ipsius x accipiendae erunt functiones, ut tam $dx\sqrt{RS}$ quam

$dx\sqrt{(R+1)(S-1)}$ integrationem admittant. Deinde ut arcuum summa algebraica exprimi queat, hanc quoque formulam $dx\sqrt{(R+1)S}$ oportet esse integrabilem. Hoc autem pluribus modis facile praestabitur, sumendis pro R et S talibus functionibus ut RS, $(R+1)(S-1)$ et $S(R+1)$ fiant quantitates vel ex duobus vel ex uno termino constantes, quippe in quibus exponentes ita accipere licet ut quaesito satisfiat.

I. Sit $R = ax^m$ et $S = \frac{1}{ax^m}$, fient

elementa applicatarum $= dx\left(1 \pm \sqrt{\left(\frac{1}{ax^m} - ax^m\right)}\right)$

elementa curvarum..... $= dx\left(\sqrt{\left(1 + \frac{1}{ax^m}\right)} \pm \sqrt{(1 - ax^m)}\right)$

atque debebit esse $m = \frac{-1}{4i+1}$, denotante i numerum quemcunque affirmativum integrum.

II. Sit $R = ax^m - 1$ et $S = bx^n$, fient elementa applicatarum

$$= dx\left(\sqrt{(abx^{m+n} - bx^n)} \pm \sqrt{(abx^{m+n} - ax^m)}\right)$$

et curvarum elementa

$$= dx\left(x^{\frac{m+n}{2}}\sqrt{ab} \pm \sqrt{(ax^m - 1)(bx^n - 1)}\right).$$

Quo autem tam utraque applicata, quam summa arcuum fiat algebraica, vel esse debet $m = \frac{4i+2}{4ik-1}$ et $n = \frac{4k+2}{4ik-1}$, vel etiam $n = \frac{-2i}{2ik+i+k}$ atque $n = \frac{-2k}{2ik+i+k}$, existentibus i, k numeris integris affirmativis.

III. Sit $R = \frac{ab}{c}x^m - \frac{abb}{cc}$ et $S = \frac{c}{b}x^m + 1$, fient applicatarum elementa

$$= dx\left(\sqrt{x^m\left(\frac{c}{b} - \frac{ab}{c} + ax^m\right)} \pm \sqrt{\left(ax^{2m} - \frac{abb}{cc}\right)}\right)$$

atque curvarum elementa

$$= dx\left(\sqrt{x^m\left(ax^m - \frac{ab}{c}\right)} \pm \sqrt{(b + cx^m)\left(\frac{1}{b} - \frac{ab}{cc} + \frac{a}{c}x^m\right)}\right)$$

sumaturque $m = \frac{-1}{2i+1}$.

IV. Sit $R = a^2x^{2m} + 2ax^m$ et $S = bx^m$, erunt applicatarum elementa

$$= dx\left(x^m\sqrt{(a^2bx^m + 2ab)} \pm (ax^m + 1)\sqrt{(bx^m - 1)}\right)$$

et curvarum elementa

$$= dx\left(bx^m(ax^m + 1) \pm \sqrt{x^m(a^2x^m + 2a)(bx^m - 1)}\right)$$

eritque vel $m = \frac{1}{i}$ vel $m = \frac{-2}{2i+3}$.

Hujusmodi autem formulae plures aliae hinc possunt derivari per idoneos valores loco R et S substituendos. Vale et favere perge, V. C., Tui observantissimo

L. Eulero.