LETTRE XXXIV.

Goldbach à Euler.

Sommaire. Première lettre adressée à Berlin. Problème de la théorie des nombres. Sur deux anciens ouvrages de la Bibliothèque royale de Berlin.

St. Petersburg d. 19 Aug. 1741 st. n.

— — — Was halten Ew. von dergl. propositionibus: $(3m+2)n^2+3$ kann niemals ein numerus quadratus seyn, positis pro m et n numeris integris quibuscunque?

In den Zeitungen von gelehrten Sachen habe ich unlängst gelesen, dass die beiden Mönche, so Newtoni Principia Mathematica herausgeben, Ew. Mechanicam stark gebraucht haben.

Wenn Sie auf die königl. Bibliothèque in Berlin gehen werden, lassen Sie sich doch Joh. de Luneschlos Thesaurum Mathematum reseratum per algebram novam, Patavii 1646 in fol. und Petrum Bungum de numerorum mysteriis in 4to zeigen. Ich habe A. 1718 diese Bücher, aber nur obenhin, gesehen, und kann mich fast gar nichts mehr von derselben Inhalt erinnern. Goldbach.

LETTRE XXXV.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Théorèmes de la théorie des nombres et du calcul intégral.

Berlin d. 9 September 1741.

Vor einigen Wochen haben Ihro Maj. die Königl. Frau Mutter mich zu sich holen lassen, und des Tags darauf hatte ich die Gnade bei Ihro Maj. zu speisen, und haben sowohl Ihro Majestät als die beiden Königl. Prinzessinnen mich auf die gnädigste und eine recht leutselige Art empfangen. Ihro Königl. Maj. der König haben mich auch nicht nur durch den Hn. Geh. Rath Jordan Dero Allerhöchsten Gnade und Protection versichern lassen, sondern auch Höchsteigenhändig nachfolgendes Schreiben zuzusenden die Gnade gehabt:

„Monsieur Euler. J'ai été bien aise d'apprendre que vous êtes content de votre sort et établissement présent. J'ai donné les ordres nécessaires au grand Directoire pour la pension de 1600 écus que Je vous ai accordée. S'il y a encore quelque chose dont vous aurez besoin, vous n'avez qu'à attendre mon retour à Berlin. Je suis

Au Camp de Reichenbach
ce 4 septembre 1741.

votre bien affectionné Roy
Federic".

Weilen Ihro Maj. beschlossen haben ein neues Gebäu zur Akademie aufzubauen, so ist mir aufgetragen worden, einen vollständigen Riss von den akademischen Gebäuden in St. Petersburg zu verschaffen. Weilen nun alle diese Risse schon würklich in Kupfer gestochen, ich aber davon nicht leicht ein Exemplar von dem Hn. Schumacher hoffen darf, so nehme die Freyheit Ew. gehorsamst zu ersuchen ein Exemplar von diesen Rissen kaufen und dem Hn. Stähelin überliefern zu lassen....

Die beiden gemeldten Bücher habe ich von der Bibliothec holen lassen; aber in Petri Bungi Mysteriis numerorum nicht das geringste Merkwürdige gefunden. Er durchgehet der Ordnung nach alle Zahlen von 1, 2, 3 bis tausend, und merkt von einer jeden an, wo solche in der Heil. Schrift und andern Auctoribus vorkommen; als bei 38 bringt er nichts anderes vor, als das Exempel des Kranken beim Teich zu Betesda, welcher 38 Jahre daselbst gelegen. Der Luneschloss ist ein sehr schönes Buch in seiner Art; ich habe aber dasselbe noch nicht völlig durchgegangen.

Ew. theorema, dass $(3m+2)n^2+3$ kein Quadrat seyn könne, ist sehr artig, und kann ich die Richtigkeit desselben auf folgende Art darthun: Entweder ist n durch 3 divisibel, oder nicht. Im ersten Fall ist n^2 divisibel durch 9, und bekömmt die Expression $(3m+2)n^2+3$ eine solche Form $9p+3$, welche kein Quadrat seyn kann, wie bekannt. Im andern Fall, wenn n nicht durch 3 divisibel ist, so ist n^2 eine solche Zahl: $3p+1$ und $(3m+2)n^2+3$ bekömmt diese Form $9mp+3m+6p+5$, das ist $3q+2$, von welcher Form gleichfalls bekannt, dass solche niemals ein Quadrat seyn kann. Ich habe vor langer Zeit auch solche ähnliche theoremata gefunden, als $4mn-m-1$ kann nullo modo ein Quadrat seyn. Item $4mn-m-n$ kann auch kein Quadrat seyn, positis m et n numeris integris affirmativis.

Von den divisoribus quantitatis $aa \pm mbb$, si a et b sint numeri inter se primi, habe ich auch curieuse proprietates entdeckt, welche etwas in recessu zu haben scheinen, als da sind:

Theor. 1. Omnes divisores primi formulae $aa-2bb$ continentur in forma $8n \pm 1$.

Theor. 2. Omnes divisores primi formulae $aa-3bb$ sunt $12n \pm 1$.

Theor. 3. Nullus numerus primus potest esse divisor formae $aa-5bb$ nisi qui sit in hac forma $10n \pm 1$ contentus.

Von den integralibus formulae $\frac{dx}{(1-x^n)^{\frac{p}{q}}}$ habe ich auch merkwürdige proprietates gefunden, si post integrationem ponatur $x=1$. Als da sind

Theor. Integrale $\int\frac{dx}{(1-x^4)^{\frac{3}{4}}}$ se habet ad $\int\frac{dx}{(1-x^4)^{\frac{1}{2}}}$ uti $\sqrt{2}$ ad 1, posito post utramque integrationem $x=1$.

Theor. Integrale $\int\frac{dx}{(1-xx)^{\frac{5}{6}}}$ se habet ad integrale $\int\frac{dx}{(1-xx)^{\frac{2}{3}}}$ uti $\sqrt{3}$ ad 1, posito pariter post utramque integrationem $x=1$. Welche theoremata um so viel merkwürdiger scheinen, da sonsten nach der gewöhnlichen Art diese Integralia nicht mit einander compariret werden können.

Euler.