woraus ich schliesse, dass dieser Comet nicht weit von seinem Perihelio seyn müsse; ob er aber erst dahin gehe, oder schon daher komme, kann aus dieser einigen Observation nicht geschlossen werden. Die letztvergangene Nacht war es trüb, dass man nicht observiren konnte. Im übrigen schien der nucleus wie eine stella $4^{\text{tae}}$ magnitudinis, hatte eine comam und caudam ungefähr $3^0$ lang. Was hierüber in Petersburg entweder observiret worden oder noch wird observiret werden, solches ersuche Ew. gehorsamst mir zu melden. Sobald man hier wird mehrere und accuratere Observationen machen können, werde ich solche gleich der Akademie zu überschreiben die Ehre haben.



# LETTRE XLI.

## Goldbach à Euler.

Sommaire Recherches sur les nombres et les quantités à exposans imaginaires.

St. Petersburg d. 12 April 1742.

Meine Demonstration, dass wenn $4mn - m - n^a$ kein numerus quadratus ist, auch $4mn - m - n^{a+1} = a^2$, fliesset alsofort aus der einigen Supposition $m = 4p - n^a$, denn hiedurch wird $4n(4p - n^a) - 4p = 4b^2$, quae aequatio divisa per 4, dat $4pn - p - n^{a+1} = b^2$, so dass in der Aequation $x^a = 4px - p - a^2$, wo $a$ ein numerus integer quicunque ist, $x$ keinen valorem positivum in integris haben kann. Es folget auch ferner, dass obgleich $p^2 - p - e^2$ infinitis modis ein quadratum in integris ist, dennoch

$$\frac{p \pm \sqrt{(p^2 - p - e^2)}}{2}$$

niemals ein numerus integer seyn kann; item dass die zu-erst erwähnte Formul $4mn - m - n^{a}$ keinen numerum triangularem gebe, oder dass $x^{a} = 4px - p - \frac{(b^2 - b)}{2}$ niemals eine radicem affirmativam in integris haben kann.

Gegen die mir communicirte Demonstration, wofür ich Ew. sehr verbunden bin, finde ich nichts zu erinnern, vielleicht könnte man aber generaliter sagen, dass $(a+b)^p - a^p - b^p$ allezeit per aliquem divisorem ipsius $p$ divisibile ist, woraus denn als ein casus particularis folget, dass wenn $p$ ein numerus primus ist, die gedachte Formul per ipsum numerum $p$ divisibilis seyn müsse *).

Bey Gelegenheit dessen, was Ew. von der Formul

$$2^{p\sqrt{-1}} + 2^{-p\sqrt{-1}} = 0$$

schreiben, habe ich observiret, dass wenn $n$ variabilis gesetzt wird, alsdann $2^{np\sqrt{-1}} + 2^{-np\sqrt{-1}} = 2$ werde, so oft $n$ ein numerus pariter par ist, und dass sie hingegen $= -2$ werde, so oft $n$ ein numerus pariter impar ist, und wenn $n$ ein numerus integer, $q$ aber ein numerus quicunque rationalis aut irrationalis ist, so wird allezeit

$$2^{(4n+q)p\sqrt{-1}} + 2^{-(4n+q)p\sqrt{-1}} = 2^{qp\sqrt{-1}} + 2^{-qp\sqrt{-1}}\ {}^{**}).$$

Es ist meines Erachtens auch remarquable, dass wenn man $p$ durch diese Aequation determiniret $2^{p\sqrt{-1}} + 2^{-p\sqrt{-1}} = 3$, alsdann $2^{xp\sqrt{-1}} + 2^{-xp\sqrt{-1}} =$ wird

$$\left[\frac{(1+\sqrt{5})^{2x+1} - (-1+\sqrt{5})^{2x+1}}{2^{2x+1}}\right] - \left[\frac{(1+\sqrt{5})^{2x-1} - (-1+\sqrt{5})^{2x-1}}{2^{2x-1}}\right]$$

so oft $x$ ein numerus integer ist.

Nachdem ich diese Observation wieder durchgelesen, finde ich dieselbe von keiner Wichtigkeit; man darf nur setzen $a = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$, so ist $a^{x} + a^{-x}$ der terminus generalis.

Goldbach.

*) Emendandum vid. infra. G. **) V. la lettre suivante.



# LETTRE XLII.

=

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Mêmes sujets.

---

Berlin d. 8 Mai 1742.

— — Die Corollaria, welche Ew. aus meinem theoremate, dass $4mn - m - n$ kein quadratum seyn könne, hergeleitet, sind sehr merkwürdig und übertreffen das theorema selbst weit an Wichtigkeit. Denn dass $4mn - m - n$ auch kein numerus trigonalis seyn könnte, hatte ich nicht wahrgenommen; anjetzo habe aus dieser Anleitung auch befunden, dass eben diese Formul $4mn - m - n$ auch kein numerus heptagonalis seyn könne. Ueberhaupt habe gefunden, dass alle Zahlen welche nicht $= 4mn - m - n$ seyn können, in dieser Formul $xx + yy + y$ enthalten sind. Daher diese Expression $4mn - m - n + xx + yy + y$ alle möglichen Zahlen geben muss, welches theorema einiger-