Ew. theorema, dass wenn man ex aequatione $v = c$, existente v functione quapiam ipsius x, die radicem x finden kann, man auch ex hac aequatione

$$v^{2n+1} = (2v+1)(v+1)^{n-1}$$

den valorem ipsius x bestimmen könne, — hat mich zu ergründen viel Mühe gekostet, bis ich endlich gemerket, dass diese Aequation $v^{2n+1} - (2v+1)(v+1)^{n-1} = 0$ divisibilis sey per $vv - v - 1$. Denn es ist

$$v^{2n+1} - (2v+1)(v+1)^{n-1} = v(v^{2n} - (v+1)^n) + (vv - v - 1)(v+1)^{n-1}$$

und $v^{2n} - (v+1)^n$ ist durch $vv - (v+1)$ divisibilis. Quicquid ergo sit n, aequationi $v^{2n+1} = (2v+1)(v+1)^{n-1}$ satisfacit $vv = v + 1$, und ist also $v = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, aus welcher Aequation man per hypothesin die radicem x finden kann.

Si concipiatur curva, cujus abscissa posita $= x$, applicata sit $y = \frac{x}{1.2^2} + \frac{x^2}{2.2^4} + \frac{x^3}{3.2^6} + \frac{x^4}{4.2^8} +$ etc. erit generaliter $y = l\frac{4}{4-x}$, und folglich ist die curva eine logarithmica, darin die applicata zum asymtoto wird, wenn $x = 4$. Es sey (Fig. 6) VCB eine logarithmica ordinaria asymtoton habens VD, deren subtangens constans $AT = 1$. Capiatur applicata $AC = 1$, et ducta alia quacunque PM, positisque $AP = t$, et $PM = u$, erit $t = lu$, seu $udt = du$. Jam ducatur applicata $DB = 4AC = 4$, erit $AD = l4$, et ducta MQ, fiet $BQ = x$ et $QM = y$ pro casu proposito. Erit enim $AP = t = l4 - y$ et $PM = u = 4 - x$, unde ob $t = lu$ erit $l4 - y = l(4-x)$ et $y = l \cdot \frac{4}{4-x}$. Sonsten haben Ew. pro summa seriei ipsi y aequalis casu $x = 1$ geschrieben $\frac{1}{3}$, da diese Summ ist $= l \cdot \frac{4}{3}$.

Euler.

LETTRE XLV.

Goldbach à Euler.

Sommaire. Sur un passage des oeuvres de Wallis, relatif au déchiffrement. Réponse à la lettre précédente. Considérations sur la sommation des séries. Théorème de géométrie.

Moscau d. 30. Juli n. St. 1742.

Ich gratulire Ew. zu der bevorstehenden perpetuellen Pension aus Paris, denn es scheinet je länger je mehr, dass Ew. die dortige Académie des sciences sich bey Austheilung der Preise gänzlich tributaire machen werden....

Ich erinnere mich in den von Wallisio dechifrirten Briefen einige Stellen angemerket zu haben, die einer andern interprétation bedürfen, wie es Ew., wenn sie nachfolgende remarques mit den Briefen selbst conferiren wollen, ohne Zweifel befinden werden. Tom. III Op. p. 666 lin. 4 hatte in dem Briefe gestanden 125. 44. 24. 123. 68. 28. Er setzet anstatt 24 die Zahl 26 und lieset

125.	44.	26.	123.	68.	28,
co	n	d	ui	st	e

welches kein französisches Wort ist, da doch vielmehr von dem Copisten die zwei Zahlen 40 und 20, oder die eine 348 ausgelassen worden und das ganze Wort heissen soll *Conclaviste.* Lin. 10 ibid. setzet er für 128 die Zahl 138 und interpretiret sie *Hongrois*; es ist aber viel wahrscheinlicher dass 128 recht geschrieben und *homme* heisst. Auch ist nicht zu sehen, warum pag. 665 lin. 7 von unten, die Zahl 380, welche er gar nicht in den clavem gesetzet, *pall* heissen soll, da dieselbe vielmehr *paye* bedeuten wird. Die Zahl 136, welche er gar nicht interpretirt, soll vermuthlich heissen *Dame.* Dessen ohngeachtet halte ich die von Wallisio bewerkstelligte Dechifrirung vor einen grossen effort de l'esprit humain. Er gestehet aber aufrichtig, dass ihm unterschiedene chifrirte Briefe in die Hände gekommen, daraus er nichts finden können.

Ich sehe wohl, dass bey meinen Briefen allezeit die Erinnerung nöthig ist: Omnia probate, weil es mehrentheils an gehöriger Attention fehlet; indessen wird es mir doch lieb seyn, wenn nur Etwas darin enthalten ist, so Ew. Approbation meritiret. An die Observation, welche Sie mir schon längst communiciret, dass die numeri $4m+1$ nur auf einerley Art in zwey quadrata getheilt werden können, habe ich damals, als ich den letzten Brief geschrieben, nicht gedacht. Dass alle Zahlen in der formula y^2+y-x^2 begriffen sind, ist gewiss; doch hätte dieses meiner damaligen Intention nichts gehindert, wenn nur die suppositiones $u=\frac{z^2+z}{4}+1$ und $x=\frac{z^2+z}{4}-1$ aus zulänglichen Gründen wären hergeleitet worden. Denn wie es in dieser Proposition: Quilibet numerus est aequalis tribus trigonalibus uni affirmativo et duobus negativis, darauf nicht ankommt, dass in

den tribus formulis $\frac{x^2+x-y^2-y-z^2-z}{2}$, x, y und z alle nur mögliche Zahlen bedeuten, sondern vor x auch gar wohl gesetzt werden kann $2u^2$, wenn man nur erweiset, dass diese adhibita substitutio dem numero cuicunque dato, so aus der ganzen erwähnten Formul herauskommen soll, nicht hinderlich ist, so würde es auch mit dem casu, dass jeder numerus aus tribus trigonalibus bestehet, eine gleiche Bewandniss haben, wenn die suppositio $x=\frac{z^2+z}{4}+1$ gnugsam gegründet wäre.

Bald nachdem ich meinen Brief geschrieben hatte, sahe ich, dass die Observation $\frac{p+2\pm\sqrt{(4p-m+3)}}{m}=$ numero integro von keiner Erheblichkeit ist. Vielleicht sind diese etwas besser: $1+16a^2+16b^2$ nunquam habet radicem hujus formae $4n-1$, sed semper hujus $4n+1$. Numerus $4x^4+1$ in unico casu est primus, si $x=1$.

Gleich wie es aber series numerorum gibt, welche entweder nicht können durch $4n-1$ dividiret werden, oder gar numeri primi sind, so wären auch dergleichen series von Zahlen zu suchen, die entweder numeri primi sind, oder durch $4n+1$ nicht können dividiret werden, oder wenigstens den divisorem minimum niemals hujus formae $4n+1$ haben; denn so oft es sich träfe, dass ein terminus ejus seriei gleich würde a^2+1, könnte man demonstriren, dass es ein numerus primus sey. In der serie numerorum trigonalium unitate auctorum sind gewiss sehr wenige casus, da der divisor minimus ad hanc formam $4n+1$ gehöret. Einer von diesen casibus ereignet sich, wenn der exponens termini ist 252, und der numerus trigonalis unitate auctus aus den factoribus 29 und 401 bestehet. Wenn man aber dergleichen casus, in quibus divisor minimus est hujus formae $4n+1$ durch eine generale Exception ausschliessen könnte, so wären alle termini hujus formae a^2+1, in sofern sie in selbiger Exception nicht begriffen sind, numeri primi.

Was ich von $\nu^{2n+1} = (2\nu+1)(\nu+1)^{n-1}$ geschrieben hatte war blos ex consideratione numeri $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ hergenommen, ohne zu vermuthen, dass die aequatio dividirt werden könnte, welches doch, wie ich jetzo sehe, in dergleichen Fällen unumgänglich nöthig ist.

So viel ich mich erinnere, ist mir niemals eine Methode data summa seriei $\frac{1}{a+\alpha x}+\frac{1}{b+\beta x}+\frac{1}{c+\gamma x}+$ etc. inveniendi summam $\frac{\alpha^{n-1}}{(a+\alpha x)^n}+\frac{\beta^{n-1}}{(b+\beta x)^n}+\frac{\gamma^{n-1}}{(c+\gamma x)^n}+$ etc. bekannt gewesen, ausser in dem Fall, da summa prioris seriei aus einer bekannten functione ipsius x bestehet; solchergestalt wird auch dato $\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3+\delta x^4+$ etc. summabili, die series $\alpha x+2^n\beta x^2+3^n\gamma x^3+4^n\delta x^4+$ etc. summabilis; welches aber nichts sonderliches ist, da hingegen die grösste Schwierigkeit darin bestehet, dass man in Ermangelung einer solchen functionis finitae ipsius x, eine expressionem aequivalentem substituiren und selbige hernach immer weiter differentiiren könne, wie Ew. es mit den sinibus arcuum circuli gemachet. Indessen will ich doch ein theorema hieher setzen, so mir nur seit einigen Tagen eingefallen: Sint tres series: $A \ldots a+b+c+d+$ etc., $B \ldots ab+(a+b)c+(a+b+c)d+$ etc., $C \ldots a^2+b^2+c^2+d^2+$ etc., dico esse $B=\frac{A^2-C}{2}$, unde sequitur cognitis summis duarum serierum ex his tribus, dari etiam summam tertiae seriei, et

cognita summa unius seriei, dari etiam rationem, quam alterutra series reliquarum habet ad alteram. Sit ex gr. $a=\frac{1}{m}$, $b=\frac{1}{m^2}$, $c=\frac{1}{m^3}$ etc. erit $B=\frac{1}{(m+1)(m-1)^2}$. Sit $a=1$, $b=\frac{1}{3}$, $c=-\frac{1}{5}$, $d=-\frac{1}{7}$ (signis post binos quosque terminos alternantibus) erit series $B=0$. Si ponatur $\frac{1}{2^n}-\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\frac{1}{3^n}+\left(1-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)\frac{1}{4^n}-$ etc. $=f\pi^{2n}$, ubi $\pi=$ circumferentiae circuli cujus diameter 1, erit f functio ejusmodi ipsius n, quae posito $n=1$ fiat $=\frac{6p^2-\pi^2}{12}$, ubi $p=l2$. Si vero n ponatur numerus integer major unitate, tota functio fiat numerus rationalis, propterea quod in illa functione his casibus quantitates numeris p et π affectae sese destruunt. Hiebey habe ich observiret, dass $1+p^2=\frac{3\pi^2}{20}$ fere.

Ich möchte wohl wissen, ob Ew. die summas nachfolgender serierum $ab^2+(a+b)c^2+(a+b+c)d^2+$ etc. und $a^2b+(a^2+b^2)c+(a^2+b^2+c^2)d+$etc., wenn $a=1$, $b=-\frac{1}{2}$, $c=\frac{1}{3}$, $d=-\frac{1}{4}$, oder $a+b+c+$etc. $=l2$ per logarithmos et quadraturam circuli exprimiren können?

Neulich fand ich einen Zettel, darauf von meiner Hand, vermuthlich schon vor einigen Jahren, geschrieben war: Seriei $1+2^p+3^p+4^p+$ etc. summa ad datum terminum x est:

$$1+2^p(x-1)+(3^p-2^p)(x-1)\left(\frac{x-2}{2}\right)+$$
$$(4^p-2.3^p+2^p)(x-1)\left(\frac{x-2}{2}\right)\left(\frac{x-3}{3}\right)+$$
$$(5^p-3.4^p+3.3^p-2^p)(x-1)\left(\frac{x-2}{2}\right)\left(\frac{x-3}{3}\right)\left(\frac{x-4}{4}\right)+\text{etc.}$$

quae series abrumpitur si p sit numerus integer affirmativus, nec plures continet terminos quam $p+2$ continet unitates.

Auf einem andern Zettel fand ich Folgendes: Ex his formulis

I. u^n

II. $nu^{n+1} - (n+1)u^n$

III. $n^2 u^{n+2} - (2n^2 + 2n - 1) u^{n+1} + (n+1)^2 u^n$

IV. $n^3 u^{n+3} - (3n^3 + 3n^2 - 3n + 1) u^{n+2} + (3n^3 + 6n^2 - 4) u^{n+1}$
$\quad - (n+1)^3 u^n$,

quae in infinitum continuari possunt ea lege, ut si antecedens fuerit

$$n^p u^{n+p} + \alpha u^{n+p-1} + \beta u^{n+p-2} + \gamma u^{n+p-3} + \text{etc.},$$

sequens fiat

$$\begin{array}{llll} n^{p+1} u^{n+p+1} & - n^p (n+p+1) u^{n+p} & - \alpha (n+p) u^{n+p-1} & \\ & + \alpha (n+1) & + \beta (n-2) & , \\ & & - \beta (n+p-1) u^{n+p-2} & - \text{etc.} \\ & & + \gamma (n-3) & + \text{etc.} \end{array}$$

Sumatur formula quaecunque A et in casu particulari, ubi fit $n = 0$, eadem formula ponatur $= B$, dico $\frac{A-B}{(u-1)^{p+1}}$ esse summatricem seriei $1 + 2^p u + 3^p u^2 + 4^p u^3 \ldots + n^p u^{n-1}$. Sit exempli causa $p = 1$, erit $A = nu^{n+1} - (n+1)u^n$, et in casu particulari, ubi $n = 0$, transit A in $-1 = B$, quapropter

$$\frac{A-B}{(u-1)^2} = \frac{nu^{n+1} - (n+1)u^n + 1}{(u-1)^2} = 1 + 2u + 3u^2 + 4u^3 \ldots + nu^{n-1}.$$

Sonst habe ich auch bemerket, dass die summa seriei $1 + 2^{2n} + 3^{2n} + 4^{2n} +$ etc. gleich sey

$$\frac{1}{2n} x^n (x+1)^n - \frac{(n-2)}{2^2.3} x^{n-1} (x+1)^{n-1} +$$
$$\frac{(7n-8)(n-1)(n-3)}{2^4.3^2.5} x^{n-2} (x+1)^{n-2} - \text{etc.},$$

oder (posito $y = x(x+1)$) erit summatrix

$$= \frac{1}{2n} (y^n + ay^{n-1} + by^{n-2} + \ldots my^2),$$

ubi a, b, etc. determinantur hoc modo:

$$(n-1)a + n(n-1)(n-2) = 0$$

$$(n-2)b + \frac{a(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2.3.4.5} = 0$$

$$(n-3)c + \frac{b(n-2)(n-3)(n-4)}{2.3} + \frac{a(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{2.3.4.5}$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{2.3.4.5.6.7} = 0.$$

Sollte auch hierin etwas verschrieben seyn, so kann ich es doch gleich rectificiren, wie denn auch dasjenige, was jetzo von den exponentibus paribus gesagt worden, auf alle exponentes in genere zu extendiren nicht schwer seyn würde.

In den compendiis geometricis, wo das theorema Pythagoricum demonstriret wird, sollte man billig solches auch von allen figuris similibus demonstriren, woraus denn dieses corollarium folget: Si (Fig. 7) triangulum rectangulum ABC tangatur a curva quacunque $AFBGC$ in tribus punctis A, B, C, et super basibus AB et BC describantur curvae ADA, BEC, ipsi curvae ABC per omnia similes, nec sese in aliis punctis, praeter A, B, C intersecantes, fore (deductis segmentis cancellatis AFB, BGC) reliquas quasi-lunulas $ADBF + BECG = \triangle ABC$, quae quasi-lunulae in lunulas veras transibunt, si curva ABC fuerit semicirculus.

Goldbach.