LETTRE XLVI.

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Pièces de concours aux prix des académies de Paris et de Dijon. Recherches sur les nombres et les diviseurs. Considérations ultérieures sur les séries.

Berlin d. 28. August 1742.

Dass Ew. mir einen beständigen Tribut von der Akademie zu Paris prophezeien, erkenne ich als eine deutliche marque Dero gegen mich hegenden besondern Wohlgewogenheit mit der schuldigsten Dankbarkeit. Ob ich aber gleich zu Erhaltung dieses Vortheils meinerseits nicht ermangeln lasse, so scheinet doch meine von hieraus abgeschickten piècen eben dasjenige Schicksal betroffen zu haben, welches vor etlichen Jahren den Hn. Cammerherrn Korff so viel Mühe gekostet hat zu redressiren. Denn ich habe schon zu Anfang des vorigen Monats meine pièce über die Inclination des Magneten an den Hn. De Mairan geschickt, und gleichwohl noch keine Antwort, dass selbige angekommen, erhalten. Hernach

hatte ich verwichenen Martium eine pièce über den motum fluidorum in canalibus elasticis an die Académie des sciences nach Dijon, von welcher über diese Materie ein Preis von 30 Louisd'or bestimmt war, gesandt, und gleichfalls darüber noch keine Antwort empfangen, welches mich glauben macht, dass diese beiden Pièces entweder irgendwo aufgehalten, oder gar verloren gegangen seyn müssen, wobei ich nur dieses am meisten bedauere, dass ich von diesen beiden Pièces keine Copien gehalten habe. — — —

Ew. Emendationen der von Wallisio dechiffrirten Briefe halte ich für ganz richtig, erkenne aber dabei mein Unvermögen, selbsten diese tiefsinnige Materie zu untersuchen.

Dass diese Expression $\sqrt{(1 + 16aa + 16bb)}$ niemals eine Zahl von dieser Form $4n - 1$ geben könne, ist ein sehr schönes theorema, davon die Demonstration nicht so leicht in die Augen fällt. Denn gesetzt, dass

$$4n - 1 = \sqrt{(1 + 16aa + 16bb)},$$

so würde $16nn - 8n = 16aa + 16bb$ und folglich

$$n(2n - 1) = 2(a^2 + b^2).$$

Weilen nun $2(aa + bb)$ ein numerus par ist, so müsste n ein numerus par seyn, indem $2n - 1$ gewiss impar ist. Es sey also $n = 2p$, so wird $2p(4p - 1) = 2(aa + bb)$ und dannenhero $4p - 1$ ein divisor formulae $aa + bb$, welches nicht seyn kann: oder $p(4p - 1)$ müsste eine summa duorum quadratorum seyn, welches ebenfalls nicht möglich ist.

Dass $4x^4 + 1$ niemals ein numerus primus seyn könne, ausser dem casu wenn $x = 1$, ist kein Wunder, weilen diese formula generaliter in duos factores resolviret werden kann, denn es ist $4x^4 + 1 = (2xx + 2x + 1)(2xx - 2x + 1)$.

Ob es solche series numerorum gebe, welche entweder durch $4n + 1$ nicht divisibiles, oder gar numeri primi sind, zweifle ich sehr. Wenn aber gleichwohl dergleichen sich finden sollten, so würde man daraus einen grossen Vortheil zu Erfindung der numerorum primorum ziehen können.

Uebrigens halten die divisores primi aller serierum von Zahlen, welche in dieser formula enthalten sind $\alpha xx \pm \beta yy$, eine sehr artige Ordnung, welche, ungeachtet ich davon noch keine Demonstration habe, dennoch ihre völlige Richtigkeit zu haben scheint. Ich nehme deswegen die Freyheit Ew. einige dergleichen theoremata zu überschreiben, aus welchen noch unendlich viel andere hergeleitet werden können.

I. Si x et y sunt numeri primi inter se, haec formula $xx + yy$ per alios numeros primos non est divisibilis, nisi qui contineantur in hac forma $4n + 1$, atque hi numeri primi omnes ipsi in hac forma $xx + yy$ continentur. Dieses bekannte theorema setze ich voraus, um die Connexion der übrigen desto besser vor Augen zu legen.

II. Haec formula $2xx + yy$ alios divisores primos non habet, nisi qui in his formis $8n + 1$ vel $8n + 3$ contineantur. Et quoties $8n + 1$ vel $8n + 3$ fuerit numerus primus, erit is aggregatum ex quadrato et duplo alterius quadrati, seu erit formae $2xx + yy$.

III. Haec formula $3xx + yy$ alios divisores primos non habet, nisi qui in his formis $12n + 1$ et $12n + 7$ (oder in dieser einzelnen $6n + 1$) contineantur. Et quoties $6n + 1$ est numerus primus, continebitur in forma $3xx + yy$.

IV. Haec formula $5xx + yy$ alios divisores primos non habet, nisi qui in his formis $20n + 1$, $20n + 3$, $20n + 9$, $20n + 7$ contineantur, et omnis numerus primus in una harum quatuor formularum contentus erit ipse numerus formae $5xx + yy$.

V. Haec forma $6xx + yy$ alios divisores primos non habet, nisi qui in una harum quatuor formularum $24n + 1$, $24n + 5$, $24n + 7$, $24n + 11$ contineantur, et omnis numerus primus in una harum formularum contentus est ipse numerus formae $6xx + yy$.

VI. Haec forma $7xx + yy$ alios divisores primos non habet nisi qui in una harum 6 formularum $28n + 1$, $28n + 9$, $28n + 11$, $28n + 15$, $28n + 23$, $28n + 25$ (oder in einer dieser dreyen $14n + 1$, $14n + 9$, $14n + 11$) contineantur, et omnis numerus primus in una harum formularum contentus est ipse numerus formae $7xx + yy$.

Nun aber ist omnis numerus trigonalis unitate auctus in dieser formula $7xx + yy$ enthalten, und folglich können die numeri trigonales unitate aucti keine andern divisores primos haben, als welche in diesen formulis $14n + 1$, $14n + 9$, $14n + 11$, oder welches gleich viel, in dieser $7xx + yy$ enthalten sind. Hieraus lassen sich nun leicht alle numeri primi finden, welche einen numerum trigonalem unitate auctum dividiren. Solche sind nehmlich 1, 11, 23, 29, 37, 43, 53, 67, 71, 79, etc. Dahero können keine andere numeri primi hujus formae $4m + 1$ divisores seyn numeri trigonalis unitate aucti, als welche in einer von diesen drey formulis begriffen sind $28n + 1$, $28n + 9$, $28n + 25$.

Hieraus ist also klar, dass diese Expression $pxx + yy$ keine andere divisores habe, als welche in einer gewissen Anzahl von solchen formulis $4pn + s$ enthalten sind, allwo s einige Zahlen bedeutet, welche, ob sie gleich keine Ordnung unter sich zu haben scheinen, dennoch nach einer schönen lege fortgehen, welche aus diesen theorematis erhellet:

VII. Si numerus primus formae $4pn + s$ fuerit divisor formulae $pxx + yy$, tum etiam omnis numerus primus in hac forma generaliori contentus $4pn + s^k$ erit divisor formulae $pxx + yy$ atque etiam ipse erit numerus formae $pxx + yy$. Ex. gr. Quia numerus primus $28n + 9$, est numerus formae $7xx + yy$, erunt etiam numeri primi $28n + 81$ $(28n + 25)$: $28n + 729$ $(28n + 1)$ etc. numeri formae $7xx + yy$.

VIII. Si duo numeri primi $4pn + s$ et $4pn + t$ fuerint divisores formulae $pxx + yy$, tum omnis numerus primus hujus formae $4pn + s^k t^i$ erit simul numerus formae $pxx + yy$.

Wenn man also von einer solchen Expression $pxx + yy$ schon einige divisores primos entdecket hat, so kann man durch diese theoremata leicht alle mögliche finden. Als, es sey diese Formul gegeben $13xx + yy$, worin diese Zahlen 14, 17, 22, 29, 38, 49, 62 etc. enthalten sind. Numeri igitur primi, qui sunt divisores formulae $13xx + yy$ erunt 1, 7, 11, 17, 19, 29, 31. Folglich müssen alle numeri primi in his formulis $52n + 1$, $52n + 7$, $52n + 11$ etc. divisores von $13xx + yy$ seyn können. Die Formul $52n + 7$ gibt aber nach dem theorema VII noch diese $52n + 49$, $52n + 343$ (oder $52n + 31$), $52n + 7.31$, oder $52n + 9$, ferner $52n + 7.9$, oder $52n + 11$, ferner $52n + 7.11$, oder $52n + 25$, ferner $52n + 7.25$, oder $52n + 19$, ferner $52n + 7.19$, oder $52n + 29$, ferner $52n + 7.29$, oder $52n + 47$, ferner $52n + 7.47$, oder $52n + 17$, ferner $52n + 7.17$ oder $52n + 15$, ferner $52n + 7.15$, oder $52n + 1$ und hier ändert sich die Verschiedenheit der Zahlen, welche zu $52n$ gesetzt werden können, um numeros primos in forma $13xx + yy$ contentos hervorzubringen. Also nur allein daraus, dass 7 ein divisor formae $13xx + yy$ seyn kann,

weisen die beiden letzten theoremata, dass alle numeri primi in his formulis

$52n + 1$; $52n + 31$; $52n + 25$; $52n + 47$
$52n + 7$; $52n + 9$; $52n + 19$; $52n + 7$
$52n + 49$; $52n + 11$; $52n + 29$; $5\ n + 15$

contenti diese Form $13xx + yy$ haben und auch divisores von solchen Zahlen $13xx + yy$ seyn können, und mehr formulae können auch durch die theoremata nicht herausgebracht werden. Dahero gewiss ist, dass kein anderer numerus primus ein divisor formae $13xx + yy$ seyn kann, als welcher in einer der gefundenen 12 Formuln enthalten ist. Weilen nun ein jeder numerus primus in hac forma contentus $4pn + 1$ ein divisor von $pxx + yy$ seyn kann. Hieher können schöne proprietates hergeleitet werden, als z. Ex. weil 17 ein numerus primus und auch von dieser Form $2xx + yy$, so ist gewiss, dass so oft $17''' \pm 8n$ ein numerus primus ist, solcher auch eine solche Zahl $2xx + yy$ seyn müsse. Und wenn $17''' \pm 8n$ eine Zahl ist von dieser Form $2xx + yy$ und doch keinen divisorem von dieser Form admittirt, so ist dieselbe gewiss ein numerus primus.

Eine gleiche Beschaffenheit hat es auch mit den divisoribus hujusmodi formularum $pxx - yy$ oder $xx - pyy$, welche wenn sie primi sind, in dieser Form $4np \pm s$ enthalten seyn müssen, da s einige determinirte Zahlen bedeutet. Nehmlich in einigen Fällen wird seyn

1. Omnes divisores primi formae $xx - yy$ continentur in $4n \pm 1$, welches klar.

2. Omnes divisores primi formae $2xx - yy$ continentur in $8n \pm 1$.

Coroll. Ergo numerus primus $8n \pm 3$ non est numerus formae $2xx - yy$.

3. Omnes divisores primi formae $3xx - yy$ continentur in forma $12n \pm 1$.

4. Omnes divisores primi formae $5xx - yy$ continentur vel in $20n \pm 1$ vel in $20n \pm 9$ (oder in dieser einzeln $10n \pm 1$).

etc.

Et si numerus primus $4pn + s$ fuerit divisor formae $pxx - yy$ oder $xx - pyy$, tum $\pm 4np \pm s^k$ erit ipse numerus formae $pxx - yy$ vel $xx - pyy$, quoties fuerit numerus primus. Si duo numeri primi s et t fuerint numeri formae $pxx - yy$, tum quoties $\pm 4np \pm s^{\mu} t^{\nu}$ fuerit numerus primus, simul erit numerus formae $pxx - yy$. Also weil 7 und 17 numeri primi und von dieser Form $2xx - yy$ sind, so wird auch $\pm 8n \pm 7^{\mu}.17^{\nu}$ eine Zahl von dieser Form seyn, so oft dieselbe ein numerus primus ist. Es sey $\mu = 1$, $\nu = 1$, so ist $7.17 = 119$ und $119 + 8 = 127 =$ numero primo, folglich wird seyn $127 = 2xx - yy = 2.64 - 1$. Hieraus ist nun klar, dass es nicht möglich ist Suiten von Zahlen, so in einer solchen Formul $pxx \pm qyy$ begriffen sind, zu finden, welche nicht divisores von dieser Art $4n + 1$ admittiren sollten.

Ich glaube aber fest, dass ich diese Materie bei weitem noch nicht erschöpfet habe, sondern, dass sich darin noch unzählig viele herrliche proprietates numerorum entdecken lassen, wodurch die doctrina de divisoribus zu einer weit grösseren Vollkommenheit gebracht werden könnte; und bin dabei gewiss, dass wenn Ew. diese Materie einiger Attention würdigen werden, Dieselben darin sehr wichtige Découverten machen würden. Der grösste Vortheil würde

aber sich alsdann recht zeigen, wenn man für diese theoremata demonstrationes finden sollte.

Wenn drey Series also beschaffen sind, dass $A = a + b + c + d +$ etc., $B = ab + (a + b)c + (a + b + c)d +$ etc. et $C = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 +$ etc., so ist B die summa factorum ex binis terminis seriei A, und ist folglich die dupla summa factorum ex binis, $2B$, una cum summa quadratorum singulorum C gleich dem quadrato seriei A, seu $2B + C = AA$ et $B = \frac{AA - C}{2}$. Solche theoremata können auf höhere potestates extendirt werden. Als wenn

$$\begin{aligned} A &= a + b + c + d + \text{etc.} \\ B &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \text{etc.} \\ C &= a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + \text{etc.} \\ D &= a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + \text{etc.} \end{aligned}$$

so wird seyn terminorum a, b, c, d, e etc.

summa factorum ex binis $= \frac{A^2 - B}{2}$

„ „ ex ternis $= \frac{A^3 - 3AB + 2C}{6}$

„ „ ex quaternis $= \frac{A^4 - 6A^2B + 8AC + 3B^2 - 6D}{24}$

etc.

Wenn Ihre mir proponirten Series gesetzt werden

$$P = ab^2 + (a + b)c^2 + (a + b + c)d^2 + (a + b + c + d)e^2 + \text{etc.}$$

$$Q = a^2b + (a^2 + b^2)c + (a^2 + b^2 + c^2)d + (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)e + \text{etc.}$$

so wird seyn $P + Q = AB - C$, folglich wenn

$$A = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \text{etc.}$$

$$B = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \text{etc.}$$

$$C = 1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{27} - \frac{1}{64} + \frac{1}{125} - \text{etc.}$$

so kann die summa der beiden serierum $P + Q$ nicht per logarithmos et quadraturam circuli angegeben werden, weilen die series C noch nicht summirt werden kann. Viel weniger kann also eine jede für sich summirt werden. Wenn aber dieses geschehen könnte, so hätte man die summam seriei C, welche ich bisher vergebens gesucht. Die valores $1 + p^2$ und $\frac{3\pi^2}{20}$, wenn $p = l2$, differiren so wenig von einander, dass ich dieselben bald für völlig gleich gehalten hätte; ich habe deswegen beider valores genauer gesucht und gefunden $1 + p^2 = 1{,}4804530139$ und $\frac{3}{20}\pi^2 = 1{,}48044066$.

Die formulae, welche Ew. mir für die summationem seriei $1 + 2^p + 3^p + 4^p +$ etc. usque ad datum terminum überschrieben, erinnere ich mich noch in Petersburg bei Denselben gesehen zu haben, und entspringet die erste Expression $1 + 2^p(x-1) + (3^p - 2^p)\frac{(x-1)(x-2)}{1.2} +$ etc. ex differentiis continuo sumtis, und die andern formulae kommen per differentiationem heraus. Um aber die summam in der bequemsten Form zu finden, so halte ich diese Art für die leichteste:

$$1 + 2^p + 3^p + 4^p \ldots + x^p =$$
$$\frac{x^{p+1}}{p+1} + \frac{x^p}{1.2} + \frac{p}{2.3}\cdot\frac{1}{2}x^{p-1} - \frac{p(p-1)(p-2)}{2.3.4.5}\cdot\frac{1}{6}x^{p-3}$$
$$+ \frac{p(p-1)\ldots(p-4)}{2.3\ldots7}\cdot\frac{1}{6}x^{p-5} - \frac{p(p-1)\ldots(p-6)}{2.3\ldots9}\cdot\frac{3}{10}x^{p-7}$$
$$+ \frac{p(p-1)\ldots(p-8)}{2.3\ldots11}\cdot\frac{5}{6}x^{p-9} - \frac{p(p-1)\ldots(p-10)}{2.3\ldots13}\cdot\frac{691}{210}x^{p-11}$$
$$+ \frac{p(p-1)\ldots(p-12)}{2.3\ldots15}\cdot\frac{35}{2}x^{p-13} - \text{etc.}$$

allwo das Hauptwerk auf diese seriem fractionum ankommt, welche Ew. genugsam noch bekannt seyn wird:

$$\overset{1}{\frac{1}{2}},\ \overset{2}{\frac{1}{6}},\ \overset{3}{\frac{1}{6}},\ \overset{4}{\frac{3}{10}},\ \overset{5}{\frac{5}{6}},\ \overset{6}{\frac{691}{210}},\ \overset{7}{\frac{35}{2}},\ \overset{8}{\frac{3617}{30}},\ \overset{9}{\frac{43867}{42}},\ \overset{10}{\frac{1212277}{110}},\ \overset{11}{\frac{854513}{6}},$$
$$\overset{12}{\frac{1181820455}{546}},\ \overset{13}{\frac{76977927}{2}};$$

so weit habe ich sie continuirt. Der terminus generalis exponenti n respondens kann also exprimirt werden

$$(2n+1)\left(-\frac{1}{2} + \frac{(2^{2n} - 2.1)}{3} - \frac{(3^{2n} - 3.2^{2n} + 3.1)}{4}\right.$$
$$\left. + \frac{(4^{2n} - 4.3^{2n} + 6.2^{2n} - 4.1)}{5}\ \text{etc.}\right)$$

welche gleichfalls abrumpirt wird.

Obgleich diese series $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} +$ etc. per quadraturam circuli exprimirt wird, so kann doch die Summ von dieser $x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} + \frac{x^4}{16} +$ etc. nicht generaliter gegeben werden, und ausser dem casu $x = 1$ habe bisher noch keinen andern, als wenn $x = \frac{1}{2}$, summiren können. Nehmlich posito $p = l2$ et $\pi : 1 =$ periph. : diam., so kommt heraus

$$\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{8} + \frac{1}{16.16} + \frac{1}{25.32} + \frac{1}{36.64} + \text{etc.} = \frac{\pi\pi - 6pp}{12}.$$

Endlich habe die Ehre noch dieses theorema hinzuzufügen, welches öfters einen grossen Nutzen haben kann:

Theorema. Si fuerit

$$s = 1 + \frac{a}{n+1} + \frac{aa}{2n+1} + \frac{a^3}{3n+1} + \frac{a^4}{4n+1} + \text{etc.}$$

erit

$$\frac{ss}{2} = \frac{1}{2} + \frac{a}{n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) + \frac{aa}{2n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1}\right)$$
$$+ \frac{a^3}{3n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3n+1}\right)$$
$$+ \frac{a^4}{4n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{4n+1}\right) + \text{etc.}$$

Leonh. Euler.