LETTRE XLVII.

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Réponse à la lettre précédente. Introduction de deux nouveaux signes: 8 et $\div$. Globules de sang de Leuwenhoek. Notice littéraire.

Moscau d. 1 October st. n. 1742.

——— Dass $p(4p-1)$ keine summa duorum quadratorum seyn kann, wird von Ew. als bekannt angenommen; ich deducire es aber daher, quia $n = 2p \pm \sqrt{(4p^2 - p - a^2)}$, und dieses, quia $n^2 = 4pn - p - a^2$. Sonst habe ich auch gefunden, dass eine summa trium datorum quadratorum nicht gleich seyn kann dem facto ex duobus, multiplicato per quadratum par, oder dass $e^2 + f^2 + g^2 = 4e^2 f^2 p^2$; imgleichen si est $fmn - m - n = a^2$ (ubi f, m, n, a sint integri affirmativi), erit etiam $fp^2 mn - m - n = a^2$, ubi p praeterea sit integer. Da es aber mit dem casu $f = 4$ be-

kanntermaassen in aequatione priori seine Richtigkeit hat, so wird auch $4mnp^2 - m - n = a^2$, und kann gar wohl seyn, dass f für sich selbst noch viele oder unzählige valores ausser dem quaternario hat, wie es sich denn findet, dass wenn alle divisores primi hujus numeri $3xx + yy$ (ubi x et y sunt numeri inter se primi) unter dieser formula $6n + 1$ begriffen sind (de quo dubitare nefas), f auch $= 12$ gesetzt werden kann, folglich $12mnp^2 - m - n = a^2$. Ich habe unter den remarques, so Ew. mir von den divisoribus formulae $px^2 + y^2$ communiciren wollen, insonderheit diese betrachtet, dass ein jeder numerus trigonalis unitate auctus in dieser formula $7xx + yy$ enthalten ist und dahero keine andere divisores primos haben soll, als welche in diesen formulis $14n + 1$, $14n + 9$, $14n + 11$ bestehen. Weil aber unzählige numeri trigonales (als z. Ex. 21) unitate aucti zu dieser Formul $7x^2 + y^2$ gleichwol nicht gebracht werden können, so verstehe ich Ew. theorema nur von den numeris trigonalibus paribus, quorum scilicet exponentes sunt hujus formae $4m - \frac{(1 \mp 1)}{2}$, denn dieser exponentium trigonales unitate aucti sind offenbar $7m^2 + (m \pm 1)^2$, und gehören alle, sie mögen primi oder non primi seyn, unter nachfolgende 4 classes: $7n + 0$, $7n + 1$, $7n + 2$, $7n + 4$, welches jedoch mit Ew. Specification der divisorum (als worin der numerus 7 ausgelassen ist) nicht übereinkommet. Ich bin indessen Ew. für die Communication dieser besondern theorematum sehr verbunden, ohngeachtet ich nicht alles pro rei dignitate einsehen kann.

Nach dem von Ew. mir schon längst communicirten valore $l2$, hatte ich $1 + l2 . l2$ gefunden 1480453017915 20..., welcher von den in Dero Schreiben angeführten Zahlen etwas differirt, weil aber der error sich erst nach der neunten Ziffer äussert, will ich den von Ew. angegebenen valorem lieber für wahr annehmen, als die Multiplication wiederholen.

Die 12 terminos seriei $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{3}{10}$, etc. habe ich auch schon längst abgeschrieben gehabt und den 13[ten] aus Dero letztem Briefe bereits dazu gesetzet.

Das quadratum seriei $s = 1 + \frac{a}{n-1} + \frac{a^2}{2n+1} +$ etc., welches ist

$$ss = 2\left(1 + \frac{a}{n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) + \frac{a^2}{2n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1}\right) + \text{etc.}\right)$$

scheinet nur blos deswegen merkwürdig zu seyn, weil die coëfficientes in einer so leichten Ordnung fortgehen.

Was ich in meinem vorigen von den lunulis geschrieben hatte, ist von Ew. vermuthlich übergangen worden, nicht weil es unrichtig, sondern weil es gar zu offenbar ist.

Da nach der angenommenen Bedeutung der signorum $\pm$ und $\mp$ diese Formul $\pm a \mp b$ entweder $a - b$ oder $-a + b$ heissen muss, so ist allerdings ein signum nützlich, welches ausser diesen beiden valoribus auch $a + b$ und $-a - b$ andeutet; dieses erinnere ich mich in einigen Büchern mit 8 ausgedruckt gesehen zu haben, und auf solche Weise halte ich dafür, dass man durch $8\,1\,8\,\frac{1}{2}\,8\,\frac{1}{3}\,8\,\frac{1}{4}\,8$ etc. alle quantitates rationales, surdas et a quibuscunque quadraturis pendentes exprimiren könne; die ganze Kunst bestehet nur darin, dass die signa $+$ et $-$ suis locis recht substituiret werden.

Weil aber doch das signum 8 nur alternative entweder $+$ oder $-$ bedeutet, so kann man noch ein signum, etwa $\div$ (welches der Stifelius vor $-$ zu gebrauchen pfleget) in diesem Verstande annehmen, dass es simul et $+$ et $-$ bedeute. So gibt es ex. gr. eine seriem numerorum n, der apparence nach valde irregularem, und die wohl noch von Niemanden consideriret seyn mag, von dieser Beschaffenheit $n \div p = P$, wo p und P numeros primos bedeuten, so dass, wenn $n - p$ ein numerus primus ist, ex natura numeri n auch $n + p$ ein numerus primus seyn muss; durch n aber werden folgende numeri angedeutet 2, 3, 4, 5, 6, 8, 12, 18, 24, 30, etc. Gleichwie nun alle numeri primi majores quam 3 unter die Formul $6m \pm 1$ gehören, so hat es das Ansehen, dass die termini dieser neuen seriei, welche grösser als 8 sind, in der Formul $6m$ begriffen seyen.

Die series numerorum 2, 4, 6, 10, 14, 16, 20, 24, etc. deren quadrata, unitate aucta, numeri primi sind, scheinet diese proprietatem zu haben, dass eine jede Zahl aus zweyen der vorhergehenden bestehe, als $6 = 2 + 4$, $24 = 10 + 14$, $20 = 4 + 16$. Oftmals ist der terminus unico modo ex duobus praecedentibus compositus, als $74 = 20 + 54$.

Es ist unlängst bei einer gewissen Gelegenheit darüber raisonniret worden, ob die globi sanguinei, welche nach des Leuwenhoeks Observation, 6 zusammen einen globum majorem formiren, nicht ferner aus 6 kleinern, und diese wieder aus 6 kleineren, et sic in infinitum zusammengesetzt seyn könnten? Wenn aber 6 globi intra cavitatem globi majoris solchergestalt concipiret werden, dass sie sich einander so viel möglich berühren, so wird der diameter globi cujusvis minoris sich ad diametrum globi majoris, in quo continentur, verhalten wie 1 zu $1 + \sqrt{2}$, und wenn dieses auf die globos sanguineos, deren ein jeder für sich selbst nicht eigentlich ein globus, sondern ein aggregatum sex minorum globorum ist, appliciret wird, diese kleineren globuli aber, wie gemeldet, aus 6 noch kleineren etc. bestehen sollen, so findet es sich, dass man nothwendig bei einem gewissen gradu determinato mit solcher diminutione globorum aufhören muss; denn weil die soliditas omnium globorum ex ordine n ad soliditatem unius globi ex ordine primo ist wie $\frac{6^{n-1}}{1+\sqrt{2})^{3n-3}}$ ad 1, so würde, wenn die subdivisio auf gleiche Art in infinitum fortginge, propter $n = \infty$, das aggregatum omnium istorum globorum respectu globi maximi infinite parvum seyn, folglich auch mit dem besten microscopio nicht gesehen werden können, welches der expérience zuwider läuft. Ich habe (Tit.) den Hn. von Bl....*), mit welchem ich hierüber gesprochen, meo periculo versichert, dass es Ew. eben so finden würden, und bitte mir desfalls Dero sentiment hievon mit wenigem zu melden. Bei dem *meo periculo* fällt mir der Matanasius ein, davon ich unlängst die 6te Edition gelesen, nachdem ich das Buch in 18 Jahren nicht gesehen hatte. Die approbation générale, so es bey dem Publico gefunden, und davon der Autor selbst unterschiedene passages anführt, zeuget in der That von dessen mérite, und trifft hier gewissermaassen des Ciceronis Ausspruch ein: *Id ipsum est summi oratoris, summum oratorem populo videri.*

Ich habe mich nach einem Buch, so den Titul führet *Labyrinthus Algebrae*, Aut. Joh. Jac. Ferguson, Hagae

*) Blumentrost?

Com. 1667. 4. und ich selbst schon vor 30 Jahren in Händen gehabt (wiewohl nichts daraus behalten) bey unterschiedenen Personen vergeblich erkundigt. Dem Hn. Hermann, welcher doch eine grosse connoissance von dieser Art Büchern hatte, war es auch ganz unbekannt. Neulich fand ich ohngefähr obgedachten Titul in meinen excerptis, und dabey geschrieben, de quo tractatu indicium vide in Actis Anglicanis ad ann. 1669 mens. Jul. p. 202. Vielleicht ist etwas darin, so einige Attention meritiret.

Goldbach.