LETTRE XLVIII.

=

Euler à Goldbach.

Sommaire. Réponse. Continuation sur les mêmes sujets.

Berlin d. 27 October 1742.

Wenn Ew. eine solche Demonstration haben, dass $n^2 = 4pn - p - a^2$, worin nicht angenommen wird, dass $q(4p-1)$ keine summa duorum quadratorum seyn kann, so ist dieselbe höchst merkwürdig, indem daraus nicht nur diese Wahrheit, somdern noch viel andere weit leichter demonstrirt werden können. Ich muss inzwischen gestehen, dass ich aller angewandten Mühe ungeachtet keine andere Demonstration habe finden können. Hingegen sehe ich deutlich ein, dass $ee + ff + gg = 4e^2 f^2 p^2$; denn soll eine summa trium quadratorum einen numerum parem machen, so muss

entweder nur ein quadratum oder alle drey quadrata paria seyn. Im ersten Fall kommt ein numerus impariter par heraus, welcher folglich kein Quadrat seyn kann; dahero ist klar, dass alle drey quadrata paria seyn müssen. Es sey also $e = 2a$, $f = 2b$, $g = 2c$, so müsste $aa + bb + cc$ gleich seyn $16a^2 b^2 p^2$, und folglich müssten um so viel mehr a, b und c numeri pares seyn, und so fort in infinitum. Aus diesem Grunde folget also noch dieser generalere Satz, dass $a^2 + b^2 + c^2 = 4abn$. Si $fmn - m - n = a^2$, erit quoque positis mpp et npp pro m et n, $fmnp^4 - mpp - npp = \square$ und folglich $fmnpp - m - n = \square$. Damit aber die erste Aequation ihre Richtigkeit habe, so kann freylich der coëfficiens f praeter 4 unendlich viel andere valores haben, wie Ew. angemerket haben; wobei ich hierauf gefallen, dass si formulae $faa + 1$ nullus extat divisor formae $4fm - 1$, auch immer $4fmn - m - n = \square$. Weil nun nach den letztens überschriebenen Observationen, hujusmodi formula $faa + bb$ dividi nequit per numerum primum formae $4fm - 1$, so folget generaliter dass $4fmn - m - n =$ quadrato, welcher Universal-Satz sich vielleicht noch leichter demonstriren lässt, als ein casus particularis. Es käme also darauf an, dass man demonstrirte, dass $\frac{aa + m + n}{4mn}$ nimmermehr ein numerus integer seyn könne, oder dass $\frac{aa + p}{pp - qq}$, ubi p et q uterque vel numerus par vel impar esse debet, kein numerus integer seyn könne, oder dass $mpp - mqq - p$ kein quadratum seyn könne. — Bey Ueberschreibung der divisorum primorum formulae $pxx + yy$, welche alle in solchen formulis exprimirt werden können $4p + \alpha$, $4p + \beta$ etc., habe vergessen zu melden, dass ausser diesen, der binarius et ipse numerus p ejusve divisores

Platz finden, deren numerus determinatus ist, und in den vorigen formulis nicht begriffen sind, und folglich à part bemerkt werden müssen. Also sind alle divisores primi formae $7xx+yy$ entweder 2, oder 7, oder in diesen Formuln enthalten $14n+1$, $14n+9$, $14n+11$; und so oft $14n+1$, oder $14n+9$, oder $14n+11$ ein numerus primus ist, so hat derselbe selbst diese formam $7xx+yy$. Alle numeri trigonales aucti unitate $\frac{xx+x}{2}+1$ sind zwar nicht eigentlich in $7xx+yy$ enthalten, sondern in $\frac{7xx+yy}{4}$; und sind also alle numeri trigonales unitate aucti et quater sumti in dieser Form begriffen $7xx+yy$. Da nun das simplum keine andere divisores haben kann, als das quadruplum, so folget dem ungeacht, dass alle numeri primi, qui sunt divisores cujusque numeri trigonalis unitate aucti, in diesen Expressionen begriffen sind: 2, 7, $14n+1$, $14n+9$, $14n+11$, und dagegen wird keine Exception gefunden werden. Dass unsere expressiones pro $l2.l2$ nicht völlig übereinkommen, rührt ohne Zweifel daher, dass der $l2$ in beiden calculis nicht gleich accurat genommen worden. Ich erinnere mich nicht mehr auf wie viel Figuren ich den $l2$ genommen; ich habe solchen in meinen Schriften nur auf 16 Figuren aufgezeichnet; es ist aber noch accurater

$$l2 = 0{,}6931471805599453094172321$$

und nachdem ich die Multiplication nochmal gemacht, so finde ich $l2.l2 = 0{,}4804530139182014246671024$.

Das gemeldete theorema: Si

$$s = 1 + \frac{a}{n+1} + \frac{a^2}{2n+1} + \frac{a^3}{3n+1} + \text{etc.}$$

erit

$$\frac{ss}{2} = \frac{1}{2} + \frac{a}{n+2}\left(1+\frac{1}{n+1}\right) + \frac{a^2}{2n+2}\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+1}\right) + \text{etc.}$$

ist deswegen merkwürdig, weilen durch dasselbe sehr leicht die summa hujus seriei $1+\frac{1}{3.3}+\frac{1}{5.5}+\frac{1}{7.7}+\frac{1}{9.9}+$ etc. gefunden werden kann. Denn weilen ist

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \text{etc.}$$

ponatur summa quadratorum horum terminorum

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \text{etc.} = p,$$

et summa factorum ex binis terminis illius seriei

$$\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \text{etc.}\right) = q, \text{ erit } p + 2q = \frac{\pi\pi}{16}.$$

Erit autem

$$\begin{aligned} q = & -\frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.5} - \frac{1}{5.7} - \text{etc.} = -\frac{1}{2}(1) \\ & + \frac{1}{1.5} + \frac{1}{3.7} + \frac{1}{5.9} + \text{etc.} = +\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{3}\right) \\ & - \frac{1}{1.7} - \frac{1}{3.9} - \frac{1}{5.11} - \text{etc.} = -\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right) \\ & + \frac{1}{1.9} + \frac{1}{3.11} + \frac{1}{5.13} + \text{etc.} = +\frac{1}{8}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right). \end{aligned}$$

Es ist also

$$\begin{aligned} -q = & \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right) \\ & - \frac{1}{8}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right) + \text{etc.} \end{aligned}$$

Wenn nun in obiger serie genommen wird $a = -1$ und $n = 2$, und also gesetzt wird

$$s = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \text{etc.} = \frac{\pi}{4}$$

erit $-q = \frac{ss}{2} = \frac{\pi\pi}{32}$. Dahero, weilen $p = \frac{\pi\pi}{16} - 2q$, so ist $p = \frac{2\pi\pi}{16} = \frac{\pi\pi}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + $ etc. Und gleichergestalt kann dieses theorema bey andern Gelegenheiten ganz unerwartete nützliche Dienste leisten. Dass in meinem

*

vorigen Ew. Einfall de lunulis nicht beantwortet habe, ist aus Versehen geschehen. Der Grund davon ist zwar ex similitudine figurarum leicht einzusehen, indessen können daraus doch solche curieuse Consequenzen gezogen werden, welche auf eine andere Art schwerlich bewiesen werden können.

Was für Zahlen für n angenommen werden können, dass wenn $n-p$ ein numerus primus ist, auch $n+p$ ein solcher werde, und dabei p einen numerum primum bedeute, kann meines Erachtens nicht generaliter angezeiget werden. Wenn aber für p eine determinirte Zahl angenommen wird, so können quovis casu series numerorum pro n gefunden werden; als, wenn $p=1$, so hat man für n diese Zahlen 2, 4, 6, 12, 18, 30, 42, 60, 72, etc., als welche Zahlen sive aucti sive minuti unitate numeros primos geben. Ist $p=2$, so kommt für n diese series 3, 5, 9, 15, 21, 39, 45, 69, 81, etc. Weil aber hier lauter numeri impares kommen, so sey $p=3$, und für alle valores von n kommt diese series 4, 8, 10, 14, 16, 20, 26, 34, 40, etc. Datur ergo unicus numerus 4 qui omnibus numeris primis (excepto 2) se minoribus sive auctus sive minutus producat numeros primos. Der grosse Vortheil, welchen uns die analysis bringt, kommt in der That nur von den signis her, welche man nach gewissen Grundsätzen zu tractiren pflegt, und dahero stehen noch sehr wichtige Erweiterungen zu vermuthen, wenn man neue signa introduciren sollte. Die Hauptsach aber wird auch auf die Erfindung der Regeln ankommen, nach welchen man dieselben signa tractiren muss. Der Newton in Arithmetica universali hat die signa dubia nur durch puncta angedeutet, und kann deswegen, weil dadurch die Multiplication angedeutet zu werden pflegt,

nicht imitirt werden. — Ew. Reflexion über die compositionem globulorum sanguineorum hat ihre völlige Richtigkeit; dergestalt, dass wenn eine similis compositio in infinitum fortginge, die quantitas materiae völlig evanescirte. Es sey A das volumen eines globi sanguinei, welches zugleich die quantitatem materiae, oder sein Gewicht, anzeigen würde, wenn der globus solid oder massiv wäre. Ist aber derselbe aus 6 globulis zusammengesetzt, welche alle solid sind, so ist die quantitas materiae nur $=\frac{6A}{(1+\sqrt{2})^3}=\frac{6A}{7+5\sqrt{2}}$ $=0{,}4264068706\,A$, das ist, die quantitas materiae in einem solchen globulo sanguineo contentae wird beinahe $\frac{14}{6}$ mal kleiner seyn, als wenn derselbe solid wäre. Sollten diese 6 globuli wiederum aus 6 noch kleinern zusammengesetzt seyn, so würde die quantitas materiae, und folglich das pondus $\frac{14}{6}\cdot\frac{14}{6}$ d. i. $\frac{196}{36}$ oder 5 mal geringer und auf solche Art bald imperceptibel werden. Da nun aber doch ein jeder globulus sanguineus ein Gewicht hat, so ist klar, dass diese Art der Zusammensetzung nicht weit fortgehet und nicht einmal sich über die dritte Ordnung erstreckt. Denn sollte ein jeder von diesen globulis wiederum aus 6 andern bestehen, wenn auch diese so schwer als Gold angenommen würden, so könnte doch das wirkliche Gewicht nicht herauskommen. Um dieses deutlicher einzusehen, so sey die gravitas specifica materiae, ex qua globuli non amplius compositi constant, $=n$. Wenn also die globuli sanguinei selbst solid wären und aus dieser Materie beständen, so würde ihre gravitas specifica gleich seyn $n=1{,}0000000\,n$ wären aber die globuli II ord. solid, so ist

die gravitas specifica .... $=0{,}4264068\,n$

sind erst die globuli III ord. solid, so ist die gravitas specifica .... $= 0{,}1818228 . n$
sind die globuli IV ord. solid, so ist die gravitas specifica .... $= 0{,}0775305 . n$
sind die globuli V ord. solid, so ist die gravitas specifica .... $= 0{,}0330595 . n$
Wenn also die gravitas specifica ultimae materiae sanguinem constituentis so schwer wäre als Gold, und erst die globuli V^ti ordinis solid wären, so würde doch die gravitas specifica sanguinis schon 30 Mal kleiner seyn, als des Golds, und also fast um die Hälfte leichter als Wasser. Da nun die gravitas specifica sanguinis nicht kleiner ist als des Wassers, und die ultima materia bey weitem nicht so schwer als Gold angenommen werden kann, so ist ganz klar, dass dieser modus compositionis cujusque globuli ex sex minoribus sich unmöglich ultra III^um ordinem erstrecken könne.

Bey dem obgedachten theoremate, dass $4nab - a - b$ nimmer ein numerus quadratus seyn könne, oder dass $\frac{pp + a + b}{ab}$ kein numerus integer per quaternarium divisibilis sey, habe ich zwar gesehen, dass $\frac{pp + a + b}{ab}$ infinitis casibus ein numerus integer werden kann; derselbe ist aber allezeit entweder impar oder doch impariter par; infinitis autem valoribus pro a et b assumtis, kann $\frac{pp + a + b}{ab}$ nicht einmal ein numerus integer werden. Sit $a = 1$, $b = 1$, erit $\frac{pp + a + b}{ab} = pp + 2$ und also entweder impar oder impariter par. Sit $a = 1$, $b = 2$, erit $\frac{pp + a + b}{ab} = \frac{pp + 3}{2}$: (2, 6, 14, 26, etc.) nehmlich allezeit impariter par. Sit $a = 1$, $b = 3$, erit

$\frac{pp + a + b}{ab} = \frac{pp + 4}{3}$, welche Formul nimmer ein numerus integer seyn kann. Sit $a = 1$, $b = 4$, erit $\frac{pp + a + b}{ab} = \frac{pp + 5}{4}$; diese kann auch nimmer ein numerus integer werden. Sit $a = 1$, $b = 5$, erit $\frac{pp + a + b}{ab} = \frac{pp + 6}{5}$: (2, 3, 11, 14, 30, etc.) entweder impar oder impariter par. Sit $a = 2$, $b = 2$, erit $\frac{pp + a + b}{ab} = \frac{pp + 4}{4}$: (1, 2, 5, 10, 17, 26, etc.) welche numeri entweder impares oder impariter pares. Sit $a = 2$, $b = 3$, erit $\frac{pp + a + b}{ab} = \frac{pp + 5}{6}$: (1, 5, 9, 21, etc.), alle impares. Sit $a = 2$, $b = 4$, erit $\frac{pp + a + b}{ab} = \frac{pp + 6}{8}$, also muss seyn $p = 2q$ und $\frac{2qq + 3}{4} =$ int., welches unmöglich. Sit $a = 2$, $b = 5$, erit $\frac{pp + a + b}{ab} = \frac{pp + 7}{10}$, welche Formul kein numerus integer seyn kann. Sit $a = 2$, $b = 6$, erit $\frac{pp + a + b}{ab} = \frac{pp + 8}{12}$: (1, 2, 6, 9, 17, 22, etc.) wo kein multiplum quaternarii vorkommt. Wenn man vielleicht diese casus weiter continuiret und wohl erwägt, so könnte man den wahren Grund finden, warum $\frac{pp + a + b}{ab}$ niemals ein numerus integer per 4 divisibilis werden kann. Es scheinen auch aus der Form $\frac{pp + a + b}{ab}$ ausser den multiplis quaternarii noch andere Zahlen ausgeschlossen zu seyn, als z. Ex. 7, denn ich habe noch keine valores pro a, b et p finden können, ut $\frac{pp + a + b}{ab}$ fieret $= 7$, dem ungeachtet aber können multipla von 7, als 14, 21, etc. herauskommen Es scheinen also in dergleichen Speculationen noch grosse

Geheimnisse verborgen zu liegen, wovon dem Fermatio einige wichtige bekannt gewesen seyn mögen, deren Verlust um so viel mehr zu bedauern ist. Ich habe an Mr. Clairaut geschrieben, ob die Manuscripte von Fermat noch zu finden wären. Da aber der goût für dergleichen Sachen bei den Meisten erloschen ist, so ist auch die Hoffnung verschwunden . . . .

Der Herr Brigadier Baudan ist hier noch ausser Dienst und hat sich mit einer Mlle. Mirabel verheirathet, die ein artiges Haus besitzt, welches ich für 2000 Rthlr. gekauft und dazu von Ihro Königl. Majestät das Privilegium eines Freyhauses erhalten habe. Dasselbe liegt zwischen der Friedrichs- und Dorotheen-Stadt, nahe bey dem Ort, wo I. M. der König das neue Schloss und die Akademie zu bauen beschlossen hat; dass also die Situation nicht erwünschter seyn könnte.

Euler.

LETTRE XLIX.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Affaires de l'Académie de St.-Pétersb. Oeuvres de Jean Bernoulli. Correspondance avec Nic. Bernoulli. Nouveau volume des *Miscellanea Berolinensia*.

Berlin d. 15 Dec. 1742.

— — Der Zustand der Akademie in Petersburg gehet mir wegen des Hn. Raths Schumacher sehr zu Herzen; am meisten aber ist der H. Bernoulli darüber allarmirt, weilen er befürchtet seine bisher genossene Gage zu verlieren. Es werden anjetzo des alten Hn. Bernoulli Schriften, so noch nicht publicirt worden, in Genève gedruckt. Dieses Werk soll unserm König dedicirt werden und der Verleger will selbst herkommen solches zu praesentiren. Mit demselben werde ich bei dieser Gelegenheit einen Accord wegen meiner Scientia navali zu treffen suchen, welches vermuthlich die Akademie nicht übernehmen wird. — —