

LETTRE L.

=

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Expressions qui ne peuvent jamais produire des nombres carrés. Valeur numérique de $(12)^2$. Nombres de Lagni et de Sharp pour la valeur de π . Globules de sang. Sur un théorème d'analyse des lettres précédentes. Somme de quelques séries.

Moscou d. 6. Dec. 1742

In meinem vorigen Briefe hatte ich $n^2 \pm 4pn - p - a^2$ als einen casum particularem hujus $n^2 \pm 4pn - p - a^2$ angenommen, welches aber darauf beruhet, dass $a^2 + 1$ durch $4n - 1$ nicht dividiret werden kann. Ich gestehe, dass ich zum öftern vermuthet, es würde das theorema $4mn - m - 1 \pm a^2$, weil kein anderer numerus determinatus als 4 und 1 darin vorkommet, sich durch die proprietates quadratorum per quaternarium divisorum demonstriren lassen, insonderheit da man die Wahrheit des theorematism gleich einsiehet, wenn m ein numerus formae $4u + 0$ oder $4u - 3$, worin schon die Hälfte aller casuum possibilium begriffen ist; hingegen

bat sich allezeit bei den casibus $m = 4u - 1$ und $m = 4u - 2$ eine Difficultät gefunden, bis ich endlich gestern die Demonstration folgendermaassen eingerichtet:

1. Quicumque numerus, divisus per 4, relinquit 2 vel 3, ille non est quadratus.

2. Si ulla harum quatuor aequationum impossibilium

$$\left. \begin{array}{l} A \dots 4mn - m - 1 \\ B \dots 4mn - m - n \\ C \dots 4mn - m - n^2 \\ D \dots 4mn - n - 1 \end{array} \right\} \equiv \square$$

est vera, omnes simul verae sunt; quoniam si vera est $4mn - m - n^a$, vera etiam est $4mn - m - n^{a+1}$ et $4mn - n - m^a$, et rursus, si posteriores verae sunt, vera etiam est prima, ut in superioribus litteris ostensum fuit.

3. Omnes numeri possibiles pro m et n continentur his quatuor casibus

$m = 4u + 0$, $m = 4u + 1$, $m = 4u + 2$, $m = 4u + 3$,
 $n = 4v + 0$, $n = 4v + 1$, $n = 4v + 2$, $n = 4v + 3$,
 sed per applicationem horum casuum apparet, quicumque

sint valores ipsius m et n , semper aliquam quatuor formularum A , B , C et D ita dividi posse per 4, ut remaneat 2 vel 3. Sit enim m vel $n = 0$ (quod compendii causa scribo pro $m = 4u + 0$ et $n = 4v + 0$ et sic in ceteris), formula A vel D divisa per 4 relinquit 3.

Si m vel $n = 1$, formula A vel D divisa per 4 relinquit 2.

Si $m = 2$, $n = 2$, C divisa per 4 relinquit 2.

Si $m = 2$, $n = 3$,
 $m = 3$, $n = 2$, $\left\{ \begin{array}{l} B \text{ divisa per 4 relinquit 3.} \end{array} \right.$

$m = 3$, $n = 3$, B divisa per 4 relinquit 2.

Ergo nulla formularum A , B , C , D aequalis est quadrato.

Die Zahl, so ich pro 12 von Ew. communiciret bekommen, muss allerdings unrichtig abgeschrieben gewesen seyn, weil sie schon in der 14^{ten} Ziffer fehlet, ich bin also Ew. für die weit accuratere sowohl von dem 12, als dessen quadrato, welche in Dero letztem Schreiben enthalten sind, verbunden.

Ein dergleichen Fehler muss gewiss auch entweder in des Mr. Lagni oder in des Hn. Sharp numerum pro quadratura circuli eingeschlichen seyn. Wenn ich mich recht erinnere, so haben Ew. diese Varietät schon längst bemerkt; weil aber doch Mr. Sharp ausdrücklich saget, dass er auch von der letzten Ziffer, so weit seine Zahl gehet, gewiss sey, so glaube ich vielmehr, dass in der Zahl des M. Lagni; entweder im Drucken oder im Abschreiben, eine 6 für eine 5 gesetzt worden, welches demnach zu rectificiren wäre, wenn die in dem numero Lagniano nachfolgenden Ziffern einigen Nutzen haben sollen.

Bey dem Punct von den globulis sanguineis ist mir lieb die Confirmation meines Raisonnements zu sehen; ob man aber sicher annehmen könne, dass diese globuli mit der ganzen massa sanguinis einerley gravitatem specificam haben, zweifle ich, weil nicht allein die globuli sondern auch die lymphä als partes constitutivae, sed heterogeneae, diejenige massam ausmachen, welche nach Ew. hypothesi beinahe so schwer als das Wasser ist.

Was Sie von dem theoremate

$$s = 1 + \frac{a}{n+1} + \frac{a^2}{2n+1} + \frac{a^3}{3n+1} + \text{etc.},$$

ergo

$$\frac{ss}{2} = \frac{1}{2} + \frac{a}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) + \frac{a^2}{2n+2} \left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1}\right) + \text{etc.}$$

erwähnen, halte ich in der That für sehr merkwürdig, nachdem ich sehe, dass man dadurch, data summa seriei $1 \div \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \div \frac{1}{7} + \text{etc.}$, die summam seriei $1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \text{etc.}$ finden könne, bey welcher Gelegenheit zugleich melde, dass ich (wiewohl per ambages) auch die summas nachfolgender serierum

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \\ & - \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \text{etc.} \\ & 1 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right) \\ & - \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16}\right) + \text{etc.} \\ & \frac{1}{4} \cdot 1 - \frac{1}{9} \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{16} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \\ & - \frac{1}{25} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \text{etc.} \end{aligned}$$

gefunden habe, wozu man vielleicht durch einen viel nähern, aber mir unbekannten Weg gelangen kann.

Wie ich gänzlich mit Ew. der Meynung bin, dass man die Zahlen, welche vor n anzunehmen sind, damit, wenn $n - p$ ein numerus primus ist, auch $n + p$ ein numerus primus werde, denotante p numerum primum, nicht generaliter bestimmen könne, so halte ich auch dafür, dass die numeri 2, 4, 6, 12, etc., welche tam addita quam demta unitate numeros primos geben, schwerlich generaliter oder per certam legem progressionis dürften zu finden seyn, so dass es hoc respectu mit beiden seriebus einerley Bewandniss zu haben scheint.

Goldbach.

P. S. Die künftigen Briefe können wieder nach St. Petersburg gesandt werden.