LETTRE LIII.

=

Euler à Goldbach.

Sommaire. Réponse à la lettre 51ème. Sommation des séries de Goldbach. Démonstration d'un théorème de la théorie des nombres.

Berlin d. 19 Januar 1743

Ew. haben in der That den gemeldeten Schreibfehler als ein grosses Glück anzusehen, wenn derselbe zu solchen herrlichen Erfindungen Anlass gegeben. Es hat mich viele Stunden und grosse calculos gekostet, ehe ich nur die Wahrheit der mir gütigst communicirten Summationen habe einsehen können. Ich kann mich aber auch nicht weiter rühmen, als dass ich dieselben demonstrirt habe. Die Methode, wodurch ich dazu gelanget, ist ziemlich weit hergesucht und so beschaffen, dass ich auch vermittelst derselben diese summas nimmer würde herausgebracht haben, wenn mir solche nicht schon vorher aus Ew. Schreiben bekannt gewesen wären. Ich habe aber nachfolgende series zu Hülfe genommen:

$$A = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \text{etc.} \qquad B = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \text{etc.}$$

$$C = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \text{etc.} \qquad D = 1 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^5} + \text{etc.}$$

$$E = \frac{1}{1^6} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \text{etc.} \qquad F = 1 + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{3^7} + \frac{1}{4^7} + \text{etc.}$$

$$G = \frac{1}{1^8} + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \text{etc.} \qquad H = 1 + \frac{1}{2^9} + \frac{1}{3^9} + \frac{1}{4^9} + \text{etc.}$$

etc.

von welchen die summae A, C, E, G, etc. bekannt sind. Aus diesen habe ich endlich mit grosser Mühe folgende hergeleitet:

$$\alpha = 1 + \frac{1}{2^3}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3^3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4^3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \text{etc.} = \frac{1}{2}AA.$$

$$\beta = 1 + \frac{1}{2^5}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3^5}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4^5}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \text{etc.} = AC - \frac{1}{2}BB.$$

$$\gamma = 1 + \frac{1}{2^7}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3^7}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4^7}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \text{etc.} = AE - BD + \frac{1}{2}CC.$$

$$\delta = 1 + \frac{1}{2^9}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3^9}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4^9}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \text{etc.} = AG - BF + CE - \frac{1}{2}DD.$$

etc.

$$a = 1 + \frac{1}{2^2}\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \frac{1}{3^2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \frac{1}{4^2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}\right) + \text{etc.} = \frac{1}{2}AA + \frac{1}{2}C.$$

$$b = 1 + \frac{1}{2^4}\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \frac{1}{3^4}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \frac{1}{4^4}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}\right) + \text{etc.} = BB - \frac{1}{3}E.$$

Porro si $aa + 1$ per nullum numerum primum formae $4n - 1$ fuerit divisibile, etiam per nullum numerum compositum formae $4n - 1$ divisibile erit. Si enim $4m - 1$ non fuerit numerus primus, unum saltem factorem primum habebit formae $4n - 1$. — Cum igitur $aa + 1$ per $4n - 1$ dividi nequeat, haec aequatio $aa + 1 = (4n - 1)(4m - 1)$ erit impossibilis, ideoque $aa = 16mn - 4m - 4n$, seu $4mn - m - n =$ quadrato. $Q.E.D.$

LETTRE LIV.

Goldbach à Euler.

Sommaire. Racines imaginaires. Théorèmes de nombres. Sommation des séries.

St. Petersburg d. 5. Febr. 1745.

Wenn dasjenige, was Ew. von den radicibus imaginariis melden, demonstriret werden könnte, so müsste auch folgen, dass posito c imaginario quocunque, f reali quocunque, und $c\sqrt{(4c^4 - f)} = r =$ numero reali, $m = \sqrt{\left(-c^2 + \frac{r}{c}\right)}$, $n = \sqrt{\left(-c^2 - \frac{r}{c}\right)}$, sowohl $m + n$ als $c(m - n)$ reales sind. Es stünde solchemnach etwa der casus $x^4 + 72x - 20$ zu untersuchen, allwo die 4 divisores sind, positis

$$c = 1 + \sqrt{-2},\ f = -20,\ \sqrt{(4c^4 - f)} = \frac{r}{4c} = \frac{18}{1+\sqrt{-2}},$$

$$\text{I. } x + c + \sqrt{\left(-c^2 + \frac{r}{c}\right)};\ \text{II. } x + c - \sqrt{\left(-c^2 + \frac{r}{c}\right)};$$

$$\text{III. } x - c + \sqrt{\left(-c^2 - \frac{r}{c}\right)};\ \text{IV. } x - c - \sqrt{\left(-c^2 - \frac{r}{c}\right)}.$$