Porro si $aa + 1$ per nullum numerum primum formae $4n - 1$ fuerit divisibile, etiam per nullum numerum compositum formae $4n - 1$ divisibile erit. Si enim $4m - 1$ non fuerit numerus primus, unum saltem factorem primum habebit formae $4n - 1$. — Cum igitur $aa + 1$ per $4n - 1$ dividi nequeat, haec aequatio $aa + 1 = (4n - 1)(4m - 1)$ erit impossibilis, ideoque $aa = 16mn - 4m - 4n$, seu $4mn - m - n =$ quadrato. $Q.E.D.$

LETTRE LIV.

Goldbach à Euler.

Sommaire. Racines imaginaires. Théorèmes de nombres. Sommation des séries.

St. Petersburg d. 5. Febr. 1745.

Wenn dasjenige, was Ew. von den radicibus imaginariis melden, demonstriret werden könnte, so müsste auch folgen, dass posito c imaginario quocunque, f reali quocunque, und $c\sqrt{(4c^4 - f)} = r =$ numero reali, $m = \sqrt{\left(-c^2 + \frac{r}{c}\right)}$, $n = \sqrt{\left(-c^2 - \frac{r}{c}\right)}$, sowohl $m + n$ als $c(m - n)$ reales sind. Es stünde solchemnach etwa der casus $x^4 + 72x - 20$ zu untersuchen, allwo die 4 divisores sind, positis

$$c = 1 + \sqrt{-2},\ f = -20,\ \sqrt{(4c^4 - f)} = \frac{r}{4c} = \frac{18}{1+\sqrt{-2}},$$

$$\text{I. } x + c + \sqrt{\left(-c^2 + \frac{r}{c}\right)};\ \text{II. } x + c - \sqrt{\left(-c^2 + \frac{r}{c}\right)};$$

$$\text{III. } x - c + \sqrt{\left(-c^2 - \frac{r}{c}\right)};\ \text{IV. } x - c - \sqrt{\left(-c^2 - \frac{r}{c}\right)}.$$

Auf Dero anderes Schreiben vom 5. Januar habe ich zu antworten, dass die Objection, welche Ew. bey $4mn-m-1 = \Box$ und den andern Formuln machen, schon damals zum Theil von mir bemerkt worden, wiewohl ich meynte, dass selbige leicht würde zu solviren seyn. Jedoch glaube ich, dass alles viel kürzer und ohne dergleichen casus particulares zu Hülf zu nehmen, demonstriret werden kann. Vorhero aber will nur ad verba: *Ferner ist klar, dass wenn man nur bewiesen hätte, dass $4mn-m-1=\Box$ casu $m=4u-1$, daraus schon folgen würde, dass $4np-n-p=\Box$. Wenn aber bewiesen wäre, dass $4np-n-p=\Box$, so würde daraus folgen, dass $4mn-m-1$ kein quadratum seyn könne casu quo $m=4u-1$, aber nicht generaliter,* — diese kleine Erinnerung machen, dass nicht allein B . . . $4np-n-p=\Box$ ein casus particularis von A . . . $4mn-m-1=\Box$, sondern auch A ein casus particularis von B ist, welches natürlicherweise contradictorium seyn würde, wenn das $\Box$ in A und B idem quadratum determinatum bedeutete; nun aber, da es in beyden Fällen diversos valores hat, gar wohl bestehen kann; denn gleich wie aus dem casu particulari ipsius A, ubi $m=4u-1$, die formula $4(4nu-u-n)$, oder diese aequivalens B . . . $4nu-n-u=\Box$ entspringet, so kömmt aus dem casu particulari ipsius B, wenn u gesetzt wird $=4n^2p-n$, die formula $4np-p-1=\Box$ heraus, welche posito p pro numero integro quocunque, die formulam A gibt, wie denn auch generaliter $4mn-m-n^{2a-1}=\Box$ durch die Substitution $m=4n^{2a}p-n^{2a-1}$ alsofort in $4np-p-1=\Box$ verwandelt werden kann.

Hier sollte die neue Demonstration folgen; weil sie mir aber nach besserer Ueberlegung selbst kein Genüge thut, so muss dieser Punkt bis auf eine andere Zeit ausgesetzt

bleiben. Indessen habe ich angemerket, dass die propositio $4pmn-m-n=\Box$ per substitutionem $m=4n^2q-n$, in hanc similem $4npq-p-q=\Box$ verwandelt wird.

Aus der mir communicirten Demonstration des theorematis: Si $s=1+\frac{a}{n+1}+$ etc., erit

$$\frac{1}{2}ss=\frac{1}{2}+\frac{a}{n+2}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)+\text{etc.}$$

erhellet zugleich die grosse Einsicht des Hn. Autoris in dergleichen Sachen, und die unterschiedenen applicationes, so Ew. von dem theoremate selbst machen, halte ich für sehr merkwürdig. Die summae serierum G et I sind eben diejenigen, so ich gefunden hatte; die summa $D+H$ war mir auch bekannt.

Dass die summae serierum

$$p=1-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\right)-\text{etc.}$$

und

$$q=\frac{1}{4}\cdot 1-\frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{16}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\text{etc.}$$

so ich gefunden zu haben vermeinet, aus einem blossen Schreibfehler entstanden wären, habe ich selbst schon in meinem letzten Schreiben erinnert; ich hätte dahero auch an selbige series nicht gedacht, wenn ich sie nicht in Dero Schreiben wiederholet gesehen, worauf ich denn alsofort befunden, dass beyder summa von

$$z=1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\text{etc.}$$

dependiret. Ew. inferiren mit grössestem Recht, dass wenn ich die seriem

$$r=\frac{1.1}{2}-\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\right)-\text{etc.}$$

auch summiren könnte, alsdann $z=p+r$ gefunden seyn würde. Nun lässet sich zwar die series r gar schön summiren, denn sie ist $=\frac{(\pi^2-3)l2}{6}$, aber p weiss ich nicht anders zu exprimiren als durch $z-r$. Ich hatte auch in meinem vorigen geschrieben, dass ich die summam seriei

$$1+\frac{1}{2^5}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3^5}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\text{etc.}$$

noch nicht wüsste; selbige aber dependiret gleichfalls von der summa z, und ist $=-\frac{z^2}{2}+\frac{\pi^6}{2.3^3.7}$.

Aus Ew. letztem Schreiben vom 19. Januar ist mir lieb gewesen zu ersehen, dass die series α, β und b nicht von den leichtesten zu summiren sind. Was nun die series α und $2\beta+b$ betrifft, so kommen unsere methodi darin völlig überein, dass $\alpha=\frac{1}{2}AA$ und $2\beta+b=\frac{19\pi^6}{2.3^4.5.7}$; hierin aber sind sie unterschieden, dass Ew. Methode gibt

$$\beta=AC-\frac{1}{2}BB,\quad b=BB-\frac{1}{3}E,$$

meine hingegen

$$\beta=\frac{\pi^6}{2.3^3.7}-\frac{BB}{2},\quad b=BB-\frac{11\pi^6}{2.3^4.5.7}.$$

Den valorem $p=\frac{1}{2}BB+\frac{1}{2}E$ finde ich richtig, die übrigen habe noch nicht untersuchet. Meine Methode werden Ew. aus nachfolgendem einigen schemate gnugsam pro omnibus seriebus huic similibus ersehen können: Sit

$$A=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\text{etc.}=\frac{\pi^2}{6},\quad C=1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\text{etc.}=\frac{\pi^4}{90}$$

erit duplum summae productorum ex binis terminis seriei A aequale A^2-C; sed hoc duplum etiam est aequale sequentibus seriebus

$$+2\left(\frac{1}{1^2.2^2}+\frac{1}{2^2.3^2}+\frac{1}{3^2.4^2}+\frac{1}{4^2.5^2}+\text{etc.}\right)$$

$$=2\left(\overset{\text{(I)}}{\frac{\pi^2}{3.1^2}}\quad\overset{\text{(II)}}{-2}\quad\overset{\text{(III)}}{-1}\right)$$

$$+2\left(\frac{1}{1^2.3^2}+\frac{1}{2^2.4^2}+\frac{1}{3^2.5^2}+\frac{1}{4^2.6^2}+\text{etc.}\right)$$

$$=2\left(\overset{\text{(I)}}{\frac{\pi^2}{3.2^2}}\quad\overset{\text{(II)}}{-\frac{2\left(1+\frac{1}{2}\right)}{2^3}}\quad\overset{\text{(III)}}{-\frac{\left(1+\frac{1}{2^2}\right)}{2^2}}\right)$$

$$+2\left(\frac{1}{1^2.4^2}+\frac{1}{2^2.5^2}+\frac{1}{3^2.6^2}+\frac{1}{4^2.7^2}+\text{etc.}\right)$$

$$=2\left(\overset{\text{(I)}}{\frac{\pi^2}{3.3^2}}\quad\overset{\text{(II)}}{-\frac{2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)}{3^3}}\quad\overset{\text{(III)}}{-\frac{\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)}{3^2}}\right)$$

etc.

Wenn nun die drey columnae perpendiculares besonders summiret werden, so entstehet

$$\text{(I)}\ \frac{2\pi^2}{3}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\text{etc.}\right)=\frac{2\pi^4}{3.6}$$

$$\text{(II)}\ -4\left(1+\frac{1}{2^3}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3^3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\text{etc.}\right)$$

$$\text{(III)}\ -2\left(1+\frac{1}{2^2}\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\frac{1}{3^2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\text{etc.}\right)$$

Die letzte series aber ist bekanntermaassen gleich $\frac{-7\pi^4}{180}$, also muss die mittlere seyn $A^2-C-\frac{2\pi^4}{3.6}+\frac{7\pi^4}{180}=\frac{-10\pi^4}{180}$ oder

$$1+\frac{1}{8}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{27}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$$
$$+\frac{1}{64}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\text{etc.}=\frac{\pi^4}{72}.$$

Dass das theorema $4mn-m-1\neq\square$ von Ew. schon längst demonstriret worden, habe ich nicht vergessen; es ist aber nur die Frage gewesen, ob man es nicht noch auf eine andere Art demonstriren könne?

Goldbach.