LETTRE LVI.

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Réponse aux deux lettres précédentes. Mêmes sujets.

Berlin d. 26. Februar 1743.

— — Die über die Akademie hochverordnete Commission hat mir letztens die versprochene Pension auf das Gnädigste confirmirt und der Hr. Admiral Graf Golowin pressirt mich sehr meine Scientiam navalem nächstens gegen eine ansehnliche Recompens einzuschicken. Ich habe solche völlig zu Ende gebracht und nur um Erlaubniss gebeten, solche vorher abschreiben zu lassen.

Was ich von den radicibus imaginariis aequationum gemeldet, dass dieselben immer dergestalt paarweis genommen werden können, dass sowohl das Product als die Summ von zweien real werde, kann ich zwar nicht generaliter demon-

striren, aber doch von allen aequationibus sexto gradu inferioribus, ingleichen auch von dieser weit generaleren aequatione $\alpha x^{5n} + \beta x^{4n} + \gamma x^{3n} + \delta x^{2n} + \varepsilon x^{n} + \zeta = 0$, denotante n numerum integrum quemcunque. Dahero der von Ew. gemeldete casus keine Schwierigkeit hat. Ich glaube aber, dass in den Expressionen ein kleines Versehen seyn muss, weilen dieselben nicht zusammenstimmen; denn wenn $c = 1 + \sqrt{-2}$ und $f = -20$, so wird $\sqrt{(4c^4 - f)} = \frac{6\sqrt{2}}{1+\sqrt{-2}}$ und nicht $= \frac{18}{1+\sqrt{-2}}$. Ich bin den Spuren Ew. nachgegangen, und glaube, dass Dieselben auf diese Aequation gekommen seyn würden

$x^4 + 8(\alpha\alpha + \beta\beta)x\sqrt{2(\beta\beta - \alpha\alpha)} + 12\alpha^4 - 40\alpha^2\beta^2 + 12\beta^4 = 0$,

welche erstlich in diese zwey factores imaginarios resolvirt wird

$$xx + 2(\alpha + \beta\sqrt{-1})x + 4\alpha\beta\sqrt{-1} - 2(\beta\beta - \alpha\alpha) \\ - 2(\alpha - \beta\sqrt{-1})\sqrt{2(\beta\beta - \alpha\alpha)} = 0$$

$$xx - 2(\alpha + \beta\sqrt{-1})x + 4\alpha\beta\sqrt{-1} - 2(\beta\beta - \alpha\alpha) \\ + 2(\alpha - \beta\sqrt{-1})\sqrt{2(\beta\beta - \alpha\alpha)} = 0,$$

dahero die 4 radices sehr complicat seyn würden. Demungeacht aber ist eben dieselbe Aequation auch ein Product von diesen zweyen factoribus realibus

$$xx + 2x\sqrt{2(\beta\beta - \alpha\alpha)} + 6\beta\beta - 2\alpha\alpha = 0$$

$$xx - 2x\sqrt{2(\beta\beta - \alpha\alpha)} + 2\beta\beta - 6\alpha\alpha = 0$$

woraus die Wahrheit meines Satzes erhellet. Ueberhaupt aber, wenn zwey factores imaginarii in se ducti dieses productum reale $x^4 + Bxx + Cx + D$ herausbringen sollen, so müssen dieselben also beschaffen seyn

$$xx + (b + c\sqrt{-1})x - aa - ab + bc\sqrt{-1} + ac\sqrt{-1}$$

$$xx - (b + c\sqrt{-1})x - aa + ab + bc\sqrt{-1} - ac\sqrt{-1}$$

Nun aber kann das productum dieser zwey factorum imaginariorum auch in diese zwey factores reales resolvirt werden $xx+2ax+aa-bb)\ (xx-2ax+aa+cc)$. Gleichergestalt wenn eine Aequation nachfolgende 4 radices imaginarias hát

I. $x=p+q\sqrt{-1}+\sqrt{(pp+2pq\sqrt{-1}-qq-r-s\sqrt{-1})}$
II. $x=p+q\sqrt{-1}-\sqrt{(pp+2pq\sqrt{-1}-qq-r-s\sqrt{-1})}$
III. $x=p-q\sqrt{-1}+\sqrt{(pp-2pq\sqrt{-1}-qq-r+s\sqrt{-1})}$
IV. $x=p-q\sqrt{-1}-\sqrt{(pp-2pq\sqrt{-1}-qq-r+s\sqrt{-1})}$

um abzukürzen, setze ich $pp-qq-r=t$, $2pq-s=u$, so wird erstlich $\sqrt{(tt+uu)}\pm t$ allzeit eine quantitas positiva, und folglich $\sqrt{(\pm t+\sqrt{(tt+uu)})}$ eine quantitas realis seyn. Dieses vorausgesetzt, so ist die summa radicum $\mathrm{I}+\mathrm{III}=2p+\sqrt{(2t+2\sqrt{(tt+uu)})}$; summa $\mathrm{II}+\mathrm{IV}=2p-\sqrt{(2t+2\sqrt{(tt+uu)})}$; productum radicum

$$\mathrm{I}.\mathrm{III}=pp+qq+p\sqrt{(2t+2\sqrt{(tt+uu)})}+\sqrt{(tt+uu)}$$
$$+q\sqrt{(-2t+2\sqrt{(tt+uu)})}$$

productum radicum

$$\mathrm{II}.\mathrm{IV}=pp+qq-p\sqrt{(2t+2\sqrt{(tt+uu)})}+\sqrt{(tt+uu)}$$
$$+q\sqrt{(-2t+2\sqrt{(tt+uu)})},$$

welches alles quantitates reales sind.

Ew. transformatio formulae $4pmn-m-n=\square$ in hanc $4npq-p-q=\square$ ope substitutionis $m=4n^2q-n$ kann ein grosses Licht zur Demonstration geben. Denn wenn man nur demonstriren könnte dass $4pmn-m-n$ kein Quadrat sey, wenn m eine Zahl ist von dieser Art $4nnq-n$, so würde zugleich demonstrirt seyn dass $4pmn-m-n$ nullo modo ein Quadrat seyn könne. Eine gleiche Transformation geht auch an durch diese Substitution

$$m=(4np)^{2a}x-\frac{n((4np)^{2a}-1)}{4np-1}$$

oder

$$m=4nn(4np)^{2a}y-\frac{n((4np)^{2a+1}-1)}{4np-1}.$$

Ich kann auf keine Weise herausbringen, dass diese series $r=\frac{1}{2}\cdot 1-\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\right)-\text{etc.}=\frac{(\pi\pi-3)l2}{6}$; denn da alle termini evoluti von dieser Form $\frac{1}{xx(x+n)}$ sind, und $\frac{1}{xx(x+n)}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{xx}-\frac{1}{nn}\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{nn}\cdot\frac{1}{(x+n)}$, so folget nach der von Ew. mir gütigst communicirten Methode, dass

$$r=\frac{\pi\pi l2}{6}-1+\frac{1}{2^2}\left(1+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{3^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\text{etc.};$$

also müsste seyn

$$\frac{1}{2}l2=1-\frac{1}{2^2}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\text{etc.}$$

Ich finde aber die summam dieser series per approximationem $=0{,}7504$, und folglich grösser als $l2$.

Dass diese series

$$\beta=1+\frac{1}{2^5}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3^5}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\text{etc.}=AC-\frac{1}{2}BB$$

habe auch durch Ew. Methode gefunden. Dass ich also die Summ $\frac{\pi^6}{2.3^3.7}-\frac{1}{2}BB$ für verdächtig halte, weilen proxime $\frac{\pi^6}{2.3^3.7}=2{,}54335$ und $\frac{1}{2}BB=0{,}72247$, und also der valor für β viel zu gross herauskäme, dieses wird noch mehr bestätigt, wenn Ew. angeben

$$b=1+\frac{1}{2^4}\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\frac{1}{3^4}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\text{etc.}$$
$$=BB-\frac{11\pi^6}{2.3^4.5.7},$$

denn da $BB=1{,}444940$ und $\frac{11\pi^6}{2.3^4.5.7}=1{,}86513$, so würde b negativum werden.

Für die von Ew. mir gütigst communicirte Methode sage tausendfältigen Dank, indem dieselbe weit leichter und natürlicher auf diese series leitet, als diejenige, welche ich gebrauchet und sehr embarassant ist. Um aber diese herrliche Methode auf die folgenden casus zu appliciren, so habe dieses Lemma gebraucht

$$\frac{1}{x^n(x+a)^n}=\frac{1}{a^n}\left(\frac{1}{x^n}\pm\frac{1}{(x+a)^n}\right)-\frac{n}{a^{n+1}}\left(\frac{1}{x^{n-1}}\mp\frac{1}{(x+a)^{n-1}}\right)$$
$$+\frac{n(n+1)}{1.2.a^{n+2}}\left(\frac{1}{x^{n-2}}\pm\frac{1}{(x+a)^{n-2}}\right)$$
$$-\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3.a^{n+3}}\left(\frac{1}{x^{n-3}}\mp\frac{1}{(x+a)^{n-3}}\right)+\text{etc.}$$

bis man ad potestates primas ipsarum x et $x+a$ kommt. Von den signis ambiguis gelten die oberen, wenn n ein numerus par ist, sonst die unteren. Wenn auch ungleiche dignitates mit einander multiplicirt werden, so dienet dieses Lemma: $\frac{1}{x^m(x+a)^n}+\frac{1}{x^n(x+a)^m}$

$$=\frac{1}{a^n}\left(\frac{1}{x^m}\pm\frac{1}{(x+a)^m}\right)-\frac{n}{1.a^{n+1}}\left(\frac{1}{x^{m-1}}\mp\frac{1}{(x+a)^{m-1}}\right)$$
$$+\frac{n(n+1)}{1.2.a^{n+2}}\left(\frac{1}{x^{m-2}}\pm\frac{1}{(x+a)^{m-2}}\right)-\text{etc.}$$
$$+\frac{1}{a^m}\left(\frac{1}{x^n}\pm\frac{1}{(x+a)^n}\right)-\frac{m}{1.a^{m+1}}\left(\frac{1}{x^{n-1}}\mp\frac{1}{(x+a)^{n-1}}\right)$$
$$+\frac{m(m+1)}{1.2\ a^{m+2}}\left(\frac{1}{x^{n-2}}\pm\frac{1}{(x+a)^{n-2}}\right)-\text{etc.}$$

Wenn man nun setzt $P=1+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{4^m}+\text{etc.}$, $Q=1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\text{etc.}$ et $Z=1+\frac{1}{2^{m+n}}+\frac{1}{3^{m+n}}+\frac{1}{4^{m+n}}+\text{etc.}$, so findet sich

$$PQ-Z=+\frac{1}{1.2^m}+\frac{1}{2^n.3^m}+\frac{1}{3^n.4^m}+\text{etc.}$$
$$+\frac{1}{1.2^n}+\frac{1}{2^m.3^n}+\frac{1}{3^m.4^n}+\text{etc.}$$
$$+\frac{1}{1.3^m}+\frac{1}{2^n.4^m}+\frac{1}{3^n.5^m}+\text{etc.}$$
$$+\frac{1}{1.3^n}+\frac{1}{2^m.4^n}+\frac{1}{3^m.5^n}+\text{etc.}$$

$$+\frac{1}{1.4^m}+\frac{1}{2^n.5^m}+\frac{1}{3^n.6^m}+\text{etc.}$$
$$+\frac{1}{1.4^n}+\frac{1}{2^m.5^n}+\frac{1}{3^m.6^n}+\text{etc.}$$
etc.

Wenn man nun sowohl gleiche als ungleiche dignitates mit einander multiplicirt, wie Ew. unfehlbar werden gethan haben, so finde, wie schon vorher gemeldet, $\beta=AC-\frac{1}{2}BB$ und $b=BB-\frac{1}{3}E$ und wenn man weiter geht und setzt

$$\alpha=1+\frac{1}{2^5}\left(1+\frac{1}{2^3}\right)+\text{etc.}$$
$$\beta=1+\frac{1}{2^6}\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\text{etc.}$$
$$\gamma=1+\frac{1}{2^7}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\text{etc.}$$

so findet sich $\gamma=AE-BD+\frac{1}{2}CC$ und $2\alpha+5\beta=10BD-\frac{9}{2}CC$, wo A, B, C, D, etc. die vorgemeldten valores behalten.

Die series $B=1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\text{etc.}$ will sich noch auf keine Art tractiren lassen. Ich fand letztens per approximationem, dass $BB=A-\frac{1}{5}$, welches ziemlich genau eintrifft, aber doch nicht Stich hält, denn es ist

$$BB=1{,}44494079843 \text{ und } A=1{,}64493406684,$$
$$A-\frac{1}{5}=1{,}44493406684 \text{ und } BB=A-\frac{1}{5}+\frac{673}{100000000}.$$

Inzwischen ist der nexus zwischen dieser Serie

$$B=1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\text{etc.}$$

und den längst bemerkten Brüchen

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{6},\ \frac{3}{10},\ \frac{5}{6},\ \frac{691}{210},\ \frac{35}{2}\ \text{etc.}$$

remarquabel; denn wenn

$$s = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{3}{10} + \frac{5}{6} - \frac{691}{210} + \frac{35}{2} - \text{etc.}$$

so ist $B = 1 + \frac{1}{2}s$. Der Beweis davon steht in meiner Dissertation: *De inventione termini summatorii ex dato termino generali.* Denn, wenn man setzt $z = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots \frac{1}{x^3}$, und $B = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \text{etc.}$ in infinitum, so wird

$$B = Z + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2x^3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2x^4} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2x^6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2x^8} - \frac{3}{10}\cdot\frac{1}{2x^{10}}$$
$$+ \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2x^{12}} - \frac{691}{210}\cdot\frac{1}{2x^{14}} + \text{etc.}$$

Wenn man also für x eine beliebige Zahl, als 10, nimmt, so kann man per additionem actualem Z finden: es wird nehmlich

$$Z = 1{,}1975319856741932516686862869780$$

dahero ist

$$B = Z + \frac{1}{200} - \frac{1}{2000} + \frac{1}{40000} - \frac{1}{12000000} + \frac{1}{1200000000} - \text{etc.}$$

und wird

$$B = 1{,}202056903159594.$$

Gleichergestalt können auch die summae serierum reliquarum potestatum gefunden werden, nachdem man einige terminos ab initio actu addirt hat. Als es sey

$Z = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \cdots \frac{1}{x^n}$ und $N = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \text{etc. in inf.}$

so wird

$$N = Z + \frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{x^{n-1}} - \frac{1}{1.2.x^n} + \frac{n}{1.2.3}\cdot\frac{1}{2x^{n+1}}$$
$$- \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3.4.5}\cdot\frac{1}{6x^{n+3}} + \frac{n(n+1)\ldots(n+4)}{1.2.3\ldots7}\cdot\frac{1}{6x^{n+5}}$$
$$- \frac{n(n+1)\ldots(n+6)}{1.2.3\ldots9}\cdot\frac{3}{10x^{n+7}} + \frac{n(n+1)\ldots(n+8)}{1.2.3\ldots11}\cdot\frac{5}{6x^{n+9}}$$
$$- \frac{n(n+1)\ldots(n+10)}{1.2.3\ldots13}\cdot\frac{691}{210x^{n+11}} + \text{etc.}$$

Durch diese Regel habe ich nachfolgende summas vero proximas gefunden

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \text{etc.} = 1{,}6449340668482264 36 = A$$
$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \text{etc.} = 1{,}202056903159594281 = B$$
$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \text{etc.} = 1{,}082323233711138191 = C$$
$$1 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \text{etc.} = 1{,}036927755106863293 = D$$
$$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \text{etc.} = 1{,}017343061984449139 = E$$
$$1 + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{3^7} + \text{etc.} = 1{,}008349277386601872 = F$$
$$1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \text{etc.} = 1{,}004077356197944339 = G$$
$$1 + \frac{1}{2^9} + \frac{1}{3^9} + \text{etc.} = 1{,}002008392826082210 = H$$
$$1 + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} + \text{etc.} = 1{,}000994575127618085 = I$$
$$1 + \frac{1}{2^{11}} + \frac{1}{3^{11}} + \text{etc.} = 1{,}000494188604194651 = K$$
$$1 + \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{3^{12}} + \text{etc.} = 1{,}000246086553308048 = L$$
$$1 + \frac{1}{2^{13}} + \frac{1}{3^{13}} + \text{etc.} = 1{,}000122713347585744 = M$$
$$1 + \frac{1}{2^{14}} + \frac{1}{3^{14}} + \text{etc.} = 1{,}000061248135058704 = N$$
$$1 + \frac{1}{2^{15}} + \frac{1}{3^{15}} + \text{etc.} = 1{,}000030588236307020 = O$$
$$1 + \frac{1}{2^{16}} + \frac{1}{3^{16}} + \text{etc.} = 1{,}000015282259408657 = P$$

Bald wird der 7te tomus von den hiesigen Miscellaneis zum Vorschein kommen, welcher ziemlich stark seyn wird, indem ich allein in der mathematischen Class auf 28 Bogen habe. Darunter ist eine grosse pièce von dem Cometen des vorigen Jahres und eine neue Art die series

$$1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \text{etc.}$$

zu summiren, welche bloss allein durch Differentiation geschiehet. — Vor etlichen Wochen hat man wiederum einen Cometen allhier gesehn, welcher aber ohne Schwanz und sehr klein war, auch nur 10 Tage lang aus dem Dracone durch Ursam majorem in Leonem minorem gehend observirt worden; es ist aber keine so accurate Observation gemacht worden, wodurch man seinen Lauf bestimmen könnte. Die Opera Joh. Bernoullii omnia werden bald aus der Presse kommen und unserm König dedicirt werden. Es nimmt mich sehr Wunder ob Ew. mit der Akademie in gar keiner Connexion mehr stehen.

Euler.

LETTRE LVII.

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Mêmes sujets.

St. Petersburg d. 28 März 1743.

Endlich stellet sich die demonstratio nova ein, so im Folgenden bestehet:

Lemma 1. Si aequatio $B \ldots 4mn - m - 1 = a^2$ non est possibilis casu quo m est numerus hujus formae $4u - 1$, neque ullo alio casu ipsius m erit possibilis, ut in superioribus litteris ostensum fuit.

Lemma 2. Si vera est aequatio B, vera etiam erit $C \ldots 4Mn - M - 1 = A^2$, posito $M = 2a + m + 4n - 1$, fiet enim $A = a + 4n - 1$.

Sed aequatio C non potest fieri vera, nisi M sit numerus hujus formae $4v - 1$ (per lemma 1), erit igitur $M = 4v - 1$ $= 2a + 4n - 1 + 4u - 1$, ergo $4v = 2a + 4n + 4u - 1$,