$$A = \frac{1}{nn(n+1)} - \frac{(2n+1)}{(n+1)^2 nn}\left(\nu + \frac{1}{n+1}\right) + \frac{\pi\pi}{6(n+1)n}$$

$$B = \frac{1}{(n+1)^2(n+2)} - \frac{(2n+3)}{(n+2)^2(n+1)^2}\left(\nu + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) + \frac{\pi\pi}{6(n+2)(n+1)}$$

$$C = \frac{1}{(n+2)^2(n+3)} - \frac{(2n+5)}{(n+3)^2(n+2)^2}\left(\nu + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3}\right) + \frac{\pi\pi}{6(n+3)(n+2)}$$

so werden die quantitates AC et BB desto weniger von einander differiren, je grösser der numerus n genommen wird.

Was Ew. von der summa seriei B in Dero Schreiben beyfügen, halte ich für sehr merkwürdig. Die Dissertation *de inventione termini summatorii* erinnere ich mich nicht gesehen zu haben, weiss auch nicht, ob dieselbe in Berlin oder allhier herausgekommen ist. Für die mir communicirten summas in terminis decimalibus danke ich ergebenst.

Goldbach.

LETTRE LVIII.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Insuffisance de la démonstration de Goldbach du théorème $4mn - m - 1 = a^2$. Résolution des fractions composées en fractions simples. Rapport fini entre deux séries infinies Le terme général d'une série étant donné, trouver le terme sommatoire de cette série Méthodes d'approximation pour trouver le nombre π.

Berlin d. 9 April 1743.

Ew. bin ich für die mir gütigst überschriebene Demonstration, dass $4mn - m - 1$ keine Quadratzahl seyn kann, gehorsamst verbunden. Die raisonnemens darin sind wegen der propositionum exclusivarum und infinitarum, so darin häufig vorkommen, so tiefsinnig, dass ich viele Mühe gehabt, ehe ich dieselben habe völlig einsehen und aus einander wickeln können, und die gewöhnlichen Regeln der Logik scheinen mir dazu kaum hinlänglich zu seyn. Alles beruhet auf dem ersten lemmate, und wenn dasselbe seine Richtigkeit hat, so ist an der Demonstration nicht das Geringste auszusetzen. Ew. berufen sich wegen dieses lemmatis auf

Dero vorige Briefe, aus welchen ich diese Demonstration gezogen:

I. Si $4nx - x - 1$ est quadratum casu $x = m$, tum erit etiam quadratum casu $x = 16mn^2 - 4n - 1$.

II. Ergo si $4nx - x - 1$ non est quadratum casu $x = 16mn^2 - 4n - 1$, tum eadem formula $4nx - x - 1$ non erit quadratum casu $x = m$.

III. Cum igitur $16mn^2 - 4n - 1$ contineatur in forma $4\nu - 1$, si demonstretur formulam $4nx - x - 1$ quadratum esse non posse casu $x = 4\nu - 1$, tum etiam certum erit formulam $4mn - m - 1$ quadratum esse non posse.

IV. Quare formula $4mn - m - 1$ quadratum esse non poterit, nisi quadratum sit haec formula $4nx - x - 1$ existente x numero formae $4\nu - 1$.

V. Quoniam ergo hae formulae $4mn - m - 1$ et $4nx - x - 1$ congruunt, formula $4mn - m - 1$ quadratum esse non potest nisi sit m numerus formae $4\nu - 1$.

Wenn diese letzte Conclusion ihre Richtigkeit hat, als worin Ew. erstes lemma besteht, so ist die ganze übrige Demonstration vollkommen. Allein eben diese letzte Consequenz erwecket bei mir einen Scrupel, welchen ich nicht wohl mit Worten ausdrücken kann. Dass aber dieser mein Scrupel gegründet sey, kann ich dadurch zeigen, weilen man auf gleiche Art beweisen könnte, dass $4mn - m + 1$ kein quadratum seyn könnte, nisi sit m numerus hujus formae $4\nu + 1$, welches doch falsch ist. Diese Demonstration würde also lauten:

I. Si $4nx - x + 1$ est quadratum casu $x = m$, erit etiam quadratum casu $x = 16mn^2 + 4n + 1$, fit enim $64mn^3 - 16mn^2 + 16n^2 = 16n^2(4mn - m + 1)$.

II. Ergo si $4nx - x + 1$ non fuerit quadratum casu $x = 16mn^2 + 4n + 1$, non erit quadratum haec forma $4mn - m + 1$.

III. Cum igitur $16mn^2 + 4n + 1$ contineatur in forma $4\nu + 1$, si demonstretur formulam $4nx - x + 1$ quadratum esse non posse casu $x = 4\nu + 1$, tum simul certum foret, hanc formulam $4mn - m + 1$ prorsus quadratum esse non posse.

IV. Quare formula $4mn - m + 1$ quadratum esse non poterit, nisi quadratum sit haec formula $4nx - x + 1$ casu $x = 4\nu + 1$.

V. Quoniam ergo formulae $4mn - m + 1$ et $4nx - x + 1$ congruunt, formula $4mn - m + 1$ quadratum esse non poterit nisi sit m numerus formae $4\nu + 1$.

Da nun in dieser Demonstration ein Fehler gewiss steckt, so kann auch die vorhergehende, als welche dieser in allem gleich ist, nicht admittirt werden. Vielleicht können aber Ew. von Dero erstem lemmate eine andere Demonstration geben, welche dieser Difficultät nicht unterworfen ist, deren Richtigkeit am füglichsten auf gleiche Art erkannt werden kann, wenn nehmlich Ew. aufsuchen werden, ob eben dasselbe ratiocinium nicht auf die Formul $4mn - m + 1$ sich appliciren lasse.

Was die andere Demonstration betrifft, dass $4pmn - m - n$ kein quadratum seyn könne, so kommt gleichergestalt die ganze Sach nur darauf an, dass man richtig beweise, dieselbe Formul könne keine Quadratzahl geben, nisi sit $m = 4nnq - n$. Wenn dieser Satz seine Richtigkeit hätte, so würde die folgende Demonstration nicht einmal nöthig seyn, weilen ob eandem rationem auch seyn müsste $n =$

$4mmr - m$, und folglich zugleich $m < n$ und $n < m$, welches unmöglich ist. Man könnte aber auf eben diese Art auch beweisen, dass $pmn - m - n$ nimmer ein quadratum seyn könne, denn kraft eben des vorigen ratiocinii musste $pmn - m - n$ kein Quadrat seyn können, nisi sit $m = nnq - n$; nun aber würde dieser Schluss der Wahrheit doch nicht gemäss seyn.

Ungeacht ich aber auf diese Weise in dem ratiocinio einen Fehler verspüre, so muss ich doch gestehen, dass ich denselben nicht deutlich darthun und vor Augen legen kann, welches doch sehr nöthig wäre um in andern Fällen denselben desto sicherer vermeiden zu können.

Meine Regel um eine solche Expression

$$\frac{ax^k + bx^{k-1} + cx^{k-2} + \text{etc.}}{(px-q)^m (rx-s)^n}$$

in ihre partes simplices zu resolviren, wenn nur $k < m+n$, verhält sich folgendergestalt. Sint partes quaesitae

$$+\frac{A}{(px-q)^m} + \frac{B}{(px-q)^{m-1}} + \frac{C}{(px-q)^{m-2}} + \frac{D}{(px-q)^{m-3}} + \cdots + \frac{M}{px-q}$$

$$+\frac{\mathfrak{A}}{(rx-s)^n} + \frac{\mathfrak{B}}{(rx-s)^{n-1}} + \frac{\mathfrak{C}}{(rx-s)^{n-2}} + \frac{\mathfrak{D}}{(rx-s)^{n-3}} + \cdots + \frac{\mathfrak{M}}{rx-s}$$

Ponatur brevitatis gratia $\frac{ax^k + bx^{k-1} + cx^{k-2} + \text{etc.}}{(rx-s)^n} = Q$ et quaerantur per differentiationem continuam, posito dx constante, valores $\frac{dQ}{dx}$, $\frac{ddQ}{dx^2}$, $\frac{d^3Q}{dx^3}$, $\frac{d^4Q}{dx^4}$ etc. eritque

$$\left.\begin{array}{ll} A = Q, & B = \frac{1}{1.p}\cdot\frac{dQ}{dx}, \\ C = \frac{1}{1.2.pp}\cdot\frac{ddQ}{dx^2}, & D = \frac{1}{1.2.3.p^3}\cdot\frac{d^3Q}{dx^3}, \text{ etc.} \end{array}\right\} \text{posito } x = \frac{q}{p}.$$

Simili modo ponatur $\frac{ax^k + bx^{k-1} + cx^{k-2} + \text{etc.}}{(px-q)^m} = S$, erit

$$\left.\begin{array}{ll} \mathfrak{A} = S, & \mathfrak{B} = \frac{1}{1.r}\cdot\frac{dS}{dx}, \\ \mathfrak{C} = \frac{1}{1.2.rr}\cdot\frac{ddS}{dx^2}, & \mathfrak{D} = \frac{1}{1.2.3.r^3}\cdot\frac{d^3S}{dx^3}, \text{ etc.} \end{array}\right\} \text{posito } x = \frac{s}{r}.$$

Wenn also diese Formul $\frac{axx + bx + c}{(4x-3)^2(4x-1)^2}$ proponirt wird, um die partes $\frac{A}{(4x-3)^2} + \frac{B}{4x-3} + \frac{\mathfrak{A}}{(4x-1)^2} + \frac{\mathfrak{B}}{4x-1}$ zu finden, so wird erstlich

$$Q = \frac{axx+bx+c}{(4x-1)^2},\ \frac{dQ}{dx} = \frac{2ax+b}{(4x-1)^2} - \frac{8(axx+bx+c)}{(4x-1)^3}$$

und posito $x = \frac{3}{4}$ ob $p = 4$ et $q = 3$, erit

$$A = \frac{\frac{9}{16}a + \frac{3}{4}b + c}{4} = \frac{9}{64}a + \frac{3}{16}b + \frac{1}{4}c$$

$$B = \frac{1}{4}\left(\frac{\frac{3}{2}a + b}{4} - \frac{\frac{9}{2}a - 6b - 8c}{8}\right) = -\frac{3}{64}a - \frac{1}{8}b - \frac{1}{4}c$$

Hernach ist

$$S = \frac{axx+bx+c}{(4x-3)^2},\ \frac{dS}{dx} = \frac{2ax+b}{(4x-3)^2} - \frac{8(axx+bx+c)}{(4x-3)^3}$$

und posito $x = \frac{1}{4}$ ob $r = 4$ et $s = 1$, erit

$$\mathfrak{A} = \frac{\frac{1}{16}a + \frac{1}{4}b + c}{4} = \frac{1}{64}a + \frac{1}{16}b + \frac{1}{4}c$$

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{4}\left(\frac{\frac{1}{2}a + b}{4} + \frac{\frac{1}{2}a + 2b + 8c}{8}\right) = \frac{3}{64}a + \frac{1}{8}b + \frac{1}{4}c$$

Folglich wird die proponirte Expression $\frac{axx+bx+c}{(4x-3)^2(4x-1)^2}$ in diese partes resolvirt

$$+\,a\left(\frac{9}{64(4x-3)^2} - \frac{3}{64(4x-3)} + \frac{1}{64(4x-1)^2} + \frac{3}{64(4x-1)}\right)$$

$$+\,b\left(\frac{3}{16(4x-3)^2} - \frac{1}{8(4x-3)} + \frac{1}{16(4x-1)^2} + \frac{1}{8(4x-1)}\right)$$

$$+ c\left(\frac{1}{4(4x-3)^2} - \frac{1}{4(4x-3)} + \frac{1}{4(4x-1)^2} + \frac{1}{4(4x-1)}\right)$$

Wenn also die gegebene expressio ein terminus generalis seriei infinitae ist, ob

$$\int\frac{1}{4x-3} - \int\frac{1}{4x-1} = \frac{\pi}{4} \text{ et } \int\frac{1}{(4x-3)^2} + \int\frac{1}{(4x-1)^2} = \frac{\pi\pi}{8} \text{ et}$$

$$u = \int\frac{1}{(4x-3)^2}$$

wie Ew. annehmen, so wird derselben seriei summa seyn

$$= a\left(\frac{\pi\pi}{512} + \frac{1}{8}u - \frac{3\pi}{256}\right) + b\left(\frac{\pi\pi}{128} + \frac{1}{8}u - \frac{\pi}{32}\right) + c\left(\frac{\pi\pi}{32} - \frac{\pi}{16}\right)$$

$$= \frac{\pi\pi}{512}(a + 4b + 16c) + \frac{u}{8}(a + b) - \frac{\pi}{256}(3a + 8b + 16c).$$

Wenn also $a = -b$, so kann die summa seriei per solam quadraturam circuli angegeben werden.

Dass die drey Formuln A, B, C, posito

$$v = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots \frac{1}{n}$$

so beschaffen sind, dass wenn n ein numerus valde magnus ist, proxime $AC = B^2$ seyn wird, deucht mir daraus klar zu seyn, weilen in diesem Fall dieselben Quantitäten sogar fast einander gleich werden.

Wenn die summa seriei $\frac{1}{(3x-2)^2}$ für bekannt angenommen wird, so ist auch die summa seriei $\frac{1}{(3x-1)^2}$ bekannt, und da in beiden die termini alterni besonders summirt werden können, so findt man daraus die summam seriei $\frac{1}{(6x \pm n)^2}$ denotante n numerum quemcunque integrum. Hieraus ist ferner klar, dass um die seriem $\frac{1}{(12x \pm n)^2}$ zu summiren, drey casus diversi ipsius n für bekannt angenommen werden müssen.

Ew. Postscriptum vom 12ten Februar habe ich wohl erhalten, und weilen ich auf die fürnehmsten Punkte schon

geantwortet hatte und nicht wusste, dass Denselben die Briefe franco zugestellt werden, so habe meine fernere Antwort bis jetzt verspart. Ew. darin enthaltene Reflexion über zwey series, deren jede eine summam infinitam hat, doch aber unter sich eine rationem finitam haben, ist sehr merkwürdig. Dergleichen series können nach Belieben auf folgende Art gefunden werden. Sit seriei $a + b + c + d +$ etc. $= A$ summa infinita, hujus autem seriei $\alpha + \beta + \gamma + \delta +$ etc. $= B$ summa finita, erit

$$\begin{aligned} AB = a\alpha &+ b(\alpha+\beta) + c(\alpha+\beta+\gamma) + d(\alpha+\beta+\gamma+\delta) + \text{etc.} \\ &+ \beta a \qquad + \gamma(a+b) \qquad + \delta(a+b+c) + \text{etc.} \end{aligned}$$

hier ist aber die summa seriei inferioris finita und folglich evanescirt dieselbe prae superiori, dahero ist $\frac{AB}{A} = B$, oder

$$\frac{a\alpha + b(\alpha+\beta) + c(\alpha+\beta+\gamma) + d(\alpha+\beta+\gamma+\delta) + \text{etc.}}{a + b + c + d + \text{etc.}} =$$

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \text{etc.}$$

ferner ist auch $b + c + d + e +$ etc. $= A$ und also

$$AB = b\alpha + c(\alpha+\beta) + d(\alpha+\beta+\gamma) + \text{etc.}$$

welche zur obigen gethan gibt

$$2AB = (a+b)\alpha + (b+c)(\alpha+\beta) + (c+d)(\alpha+\beta+\gamma) + \text{etc.} = C$$

und also $\frac{C}{2A} = B$. Wenn $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} +$ etc. und $B = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} +$ etc. so kommen Ew. series heraus.

Meine Dissertation de inventione termini summatorii ex dato termino generali seriei ist in dem 8ten tomo Commentariorum gedruckt. Dieselbe bestehet kürzlich darin, dass wenn man setzt: $\overset{1}{A} + \overset{2}{B} + \overset{3}{C} + \overset{4}{D} + \ldots + \overset{x}{X} = S$ oder wenn S den terminum summatorium einer series andeutet, deren terminus generalis ist $= X$, das ist eine quantitas ex indice x utcunque composita, so wird seyn

$$S = \int X dx + \frac{X}{1.2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{dX}{1.2.3.dx} - \frac{1}{6}\cdot\frac{d^3 X}{1.2..5dx^3} + \frac{1}{6}\cdot\frac{d^5 X}{1.2...7.dx^5}$$
$$- \frac{3}{10}\cdot\frac{d^7 X}{1.2...9\,dx^7} + \frac{5}{6}\cdot\frac{d^9 X}{1.2...11.dx^9}$$
$$- \frac{691}{210}\cdot\frac{d^{11} X}{1.2...13dx^{11}} + \text{etc.}$$

da ob integrationem $\int X dx$ eine solche constans muss addirt oder subtrahirt werden, dass die ganze expressio wird $= 0$, wenn $x = 0$.

Wenn also zum Exempel der terminus summatorius von dieser serie $1 + 2^8 + 3^8 + 4^8 + \text{etc.} \ldots + x^8$ gesucht werden soll, so ist $X = x^8$, $\int X dx = \frac{1}{9}x^9$, $\frac{dX}{dx} = 8x^7$, $\frac{ddX}{dx^2} = 7.8x^6$, $\frac{d^3 X}{dx^3} = 6.7.8x^5$, $\frac{d^4 X}{dx^4} = 5.6.7\,8x^4$, $\frac{d^5 X}{dx^5} = 4.5.6.7.8x^3$, $\frac{d^7 X}{dx^7} = 2.3.4.5.6.7.8x$, $\frac{d^9 X}{dx^9} = 0$ und die folgenden differentialia alle evanesciren. Dahero wird

$$S = \frac{1}{9}x^9 + \frac{1}{2}x^8 + \frac{2}{3}x^7 - \frac{7}{15}x^5 + \frac{2}{9}x^3 - \frac{1}{30}x.$$

So oft also X eine functio integra von x ist, weilen bey einer jeglichen Differentiation die dimensiones abnehmen, so muss immer ein terminus summatorius in forma finita gefunden werden. Wenn aber der terminus generalis X eine Fraction ist, so gehen auch die differentiationes in infinitum fort und folglich wird der terminus summatorius per seriem infinitam exprimirt. In diesem Fall kann auch die constans adjicienda nicht anders gefunden werden als dass man datum terminorum numerum actu addire und die constantem so annehme, dass in diesem Fall die bekannte Summa herauskomme. Als es sey $S = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \text{etc.} \cdots + \frac{1}{x^3}$, so ist $X = \frac{1}{x^3}$ und $\int X dx = \text{Constant.} - \frac{1}{2xx}$; ferner

$$\frac{dX}{dx} = -\frac{3}{x^4},\ \frac{ddX}{dx^2} = \frac{3.4}{x^5},\ \frac{d^3 X}{dx^3} = -\frac{3\ 4\ 5}{x^6},\ \frac{d^5 X}{dx^5} = -\frac{3.4.5.6.7}{x^8}$$

Dahero wird $S = \text{Const.}$

$$-\frac{1}{2xx} + \frac{1}{2x^3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2x^4} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2x^6} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2x^8} + \frac{3}{10}\cdot\frac{1}{2x^{10}} - \text{etc.}$$

Um die constantem zu finden, so addire man actu 10 terminos. Gesetzt, die gefundene Summe sey N, so muss, posito $x = 10$, $S = N$ werden, also wird

$$\text{Const.} = N + \frac{1}{2.10^2} - \frac{1}{2.10^3} + \frac{1}{2.2.10^4} - \frac{1}{2\ 6.10^6} + \frac{1}{2.6.10^8} - \text{etc.}$$

woraus diese constans verae proxima leicht gefunden wird.

Hiernach kann man leicht die summam seriei ad datum quemvis terminum finden, und wenn man die summam in infinitum verlangt, so setze man $x = \infty$, und da wird $S = \text{Const.}$, also die constans inventa ist die summa seriei in infinitum continuatae.

Wenn man diese seriem

$$\frac{1}{aa} + \frac{1}{aa+1} + \frac{1}{aa+4} + \frac{1}{aa+9} + \cdots + \frac{1}{aa+aa}$$

actu summirt, so ist die Summ deswegen merkwürdig, weil durch dieselbe die quadratura circuli so nahe gefunden werden kann. Es sey $s = \frac{1}{aa} + \frac{1}{aa+1} + \frac{1}{aa+4} + \cdots + \frac{1}{aa+aa}$, so wird proxime seyn $\pi = 4as - \frac{3}{a} + \frac{1}{6aa}$. Als wenn man setzt $a = 1$, fit $s = 1{,}5$ et $\pi = 3{,}166666\ldots$ zu gross. Si $a = 2$ fit $s = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} = 0{,}575$; $4as = 4{,}6$ und also $\pi = 3{,}14166666\ldots$ zu gross.

Sit $a = 3$ fit $s = \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{13} + \frac{1}{18} = 0{,}343589743589743589\overline{7}$

$4as = 12s = 4{,}1230769230769230$

subtr. $\frac{3}{a} = 1$

add. $\frac{1}{6aa} = 0{,}0185185185185185$

fiet $\pi = 3{,}1415954415954415$. Diese Expression gibt also die Peripherie immer zu gross. Ich habe demnach den excessum gesucht, und gefunden, dass sey

$$\pi = 4as - \frac{3}{a} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1.3aa} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2^2.3.7a^6} + \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2^4\,5.11a^{10}}$$
$$- \frac{35}{2}\cdot\frac{1}{2^6.7.15a^{14}} + \frac{43867}{42}\cdot\frac{1}{2^8.9.19a^{18}}$$
$$- \frac{854513}{6}\cdot\frac{1}{2^{10}.11.23a^{22}} + \frac{76977927}{2}\cdot\frac{1}{2^{12}.13.27a^{26}} - \text{etc.}$$
$$- \frac{4\pi}{e^{2\pi a} - 1},$$

allwo dieser letzte terminus ungemein klein wird, wenn a mittelmässig gross angenommen wird; denn es ist schon $e^{6\pi} = 153552990$, weilen $e^{\pi} = 23{,}14069$. — Ew. waren einmal auf Operationen bedacht, wie man Zahlen finden könnte, so ohne einige legem fortgingen, um zu versuchen, ob man nicht etwa auf eine solche Art die Zahl $\pi = 3{,}14159$ etc. herausbringen könnte. Solche irreguläre Zahlen können nun gefunden werden durch die ordentliche Division, wenn man bey jeder Operation den divisorem um 1 vermehrt; als aus diesem Exempel zu sehen

	1 2 2 4 5 2 6 4 4 10 1 10 9 6 15 6 9 18 9
Dividend	1,0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
Divisores	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20
Quotus	0,4 6 4 7 8 2 7 4 3 9 0 7 6 3 9 3 4 9 4 etc.

Wenn ich nehmlich so viel mal nehmen könnte, dass nichts übrig bliebe, so nehme ich einmal weniger, damit diese

Division in infinitum fortgehe. Wenn man nun auf eine solche Art die quadraturam circuli finden könnte, so hielte ich dieselbe für so gut als würklich gefunden.

Auf die vorher beschriebene Art durch die series $\pi = 4as - \frac{3}{a} + \frac{1}{6aa}$ etc., wenn für a eine etwas grosse Zahl, als 10, genommen wird, kann der valor ipsius π auf viel Figuren ziemlich leicht gefunden werden, allein da die coëfficientes sehr irregular fortgehen, so halte ich keine Methode bequemer um den valorem ipsius π zu finden, als diejenige, welche schon längstens einmal gefunden. Ich weiss nicht, ob Ew. derselben sich noch erinnern; sie bestehet aus zwey seriebus, deren jede stark convergirt und auch leicht per approximationes auf sehr viel Figuren summirt werden kann. Es sey nehmlich

$$A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.2^2} - \frac{1}{5.2^3} - \frac{1}{7.2^4} + \frac{1}{9.2^5} + \frac{1}{11.2^6} - \frac{1}{13.2^7} - \text{etc.}$$
$$B = \frac{1}{1.2} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} - \frac{1}{7.2^7} + \frac{1}{9.2^9} - \frac{1}{11.2^{11}} + \frac{1}{13.2^{13}} - \text{etc.}$$

so wird seyn $\pi = 4A + 2B$ oder es ist

$$\pi = 3 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5.2} - \frac{1}{6.2} - \frac{1}{7.2^2} + \frac{1}{9.2^3} + \frac{1}{10.2^3} + \frac{1}{11.2^4} - \frac{1}{13.2^5}$$
$$- \frac{1}{14.2^5} - \frac{1}{15.2^6} + \text{etc.}$$

Da in diesen seriebus nur die potestates binarii vorkommen, so kann ich auch solche geben, worin nur die potestates von 2 und 3 enthalten sind. Also wenn man setzt

$$C = \frac{1}{2} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} - \frac{1}{7.2^7} + \frac{1}{9.2^9} - \frac{1}{11.2^{11}} + \text{etc.}$$

und

$$D = \frac{1}{3} - \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} - \frac{1}{7.3^7} + \frac{1}{9.3^9} - \frac{1}{11.3^{11}} + \text{etc.}$$

so wird seyn $\pi = 4C + 4D$. Diese series scheinen mir nun weit bequemer zu seyn, als diejenige, welcher sich Sharp, Machin und Lagni bedienet, als welche ihre grossen Zahlen durch Hülfe dieser seriei

$$\pi = \frac{2\sqrt{3}}{1} - \frac{2\sqrt{3}}{3.3} + \frac{2\sqrt{3}}{5.3^2} - \frac{2\sqrt{3}}{7.3^3} + \frac{2\sqrt{3}}{9.3^4} - \text{etc.}$$

gefunden, welche nicht so stark convergirt, als eine von den obigen, und noch dazu dieser Schwierigkeit unterworfen ist, dass man erstlich $\sqrt{3}$ auf so viel Figuren als man haben will suchen, und dann diese beschwerliche Zahl beständig dividiren muss. Deswegen kann sich in keinem termino eine revolutio periodica figurarum finden, wodurch man die folgenden Figuren aus den vorhergehenden finden könnte. Dahingegen bey meinen seriebus dieser Vortheil in einem jeden termino stattfindet, so dass ich wohl 10 terminos per fractiones decimales von meinen seriebus evolviren wollte, ehe Lagni einen einzigen von seiner evolvirt hat.

Euler.

LETTRE LIX.

Goldbach à Euler.

Sommaire. Continuation sur les mêmes sujets.

St. Petersburg d. 4. Mai 1746.

Ich sehe in der That, dass das letztlich angeführte lemma 1 nicht alsofort aus dem, was ich vorher von der aequatione $4mn - m - 1 = a^2$ geschrieben hatte, erhellet; dahero bitte ich nachfolgendes raisonnement in considération zu ziehen:

Si in aequatione $E \ldots 4mn - m - 1 = a^2$ ponatur $m = 4\nu - 1$, $\nu = 4n^2M - n$ et $a^2 = 16n^2A^2$, transmutabitur aequatio E in $F \ldots 4nM - M - 1 = A^2$ quae, cum non differat ab aequatione E, nisi sola specie litterarum M, A et m, a, et pro unaquaque harum litterarum poni possint omnes numeri integri affirmativi, necesse est aequationem E et F unam eandemque esse. Si vero in E solus valor (ex hypothesi impossibilis, $m = 4\nu - 1$ comprehendit aequationem