Machin und Lagni bedienet, als welche ihre grossen Zahlen durch Hülfe dieser seriei

$$\pi = \frac{2\sqrt{3}}{1} - \frac{2\sqrt{3}}{3.3} + \frac{2\sqrt{3}}{5.3^2} - \frac{2\sqrt{3}}{7.3^3} + \frac{2\sqrt{3}}{9.3^4} - \text{etc.}$$

gefunden, welche nicht so stark convergirt, als eine von den obigen, und noch dazu dieser Schwierigkeit unterworfen ist, dass man erstlich $\sqrt{3}$ auf so viel Figuren als man haben will suchen, und dann diese beschwerliche Zahl beständig dividiren muss. Deswegen kann sich in keinem termino eine revolutio periodica figurarum finden, wodurch man die folgenden Figuren aus den vorhergehenden finden könnte. Dahingegen bey meinen seriebus dieser Vortheil in einem jeden termino stattfindet, so dass ich wohl 10 terminos per fractiones decimales von meinen seriebus evolviren wollte, ehe Lagni einen einzigen von seiner evolvirt hat.

Euler.

LETTRE LIX.

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Continuation sur les mêmes sujets.

St. Petersburg d. 4. Mai 1746.

Ich sehe in der That, dass das letztlich angeführte lemma 1 nicht alsofort aus dem, was ich vorher von der aequatione $4mn - m - 1 = a^2$ geschrieben hatte, erhellet; dahero bitte ich nachfolgendes raisonnement in considération zu ziehen:

Si in aequatione $E \ldots 4mn - m - 1 = a^2$ ponatur $m = 4\nu - 1$, $\nu = 4n^2M - n$ et $a^2 = 16n^2A^2$, transmutabitur aequatio E in $F \ldots 4nM - M - 1 = A^2$ quae, cum non differat ab aequatione E, nisi sola specie litterarum M, A et m, a, et pro unaquaque harum litterarum poni possint omnes numeri integri affirmativi, necesse est aequationem E et F unam eandemque esse. Si vero in E solus valor (ex hypothesi impossibilis, $m = 4\nu - 1$ comprehendit aequationem

F in omni sua amplitudine, quae aequatio F revera aequivalet aequationi E, sequitur, per casum $m = 4\nu - 1$, si impossibilis est in E, non magis excludi omnes casus possibiles aequationis F, quam omnes casus possibiles ipsius aequationis E, cum nullus casus possibilis reperiatur in E, quin sit assignabilis in F.

Dieses wird sich hoffentlich auch in dem von Ew vorgeschlagenen parallelismo mit der Formul $4nx - x + 1$, deren casus quadrabilitatis ich nicht untersuchet habe, souteniren. Wo nicht, so wird es mir lieb seyn die Sache ins künftige besser einzusehen. Ich danke indessen dienstl. für die in Ew. Schreiben enthaltenen schönen theoremata, wovon ich vielleicht künftig etwas zu melden Gelegenheit haben werde.

Goldbach.

P. S. Haben Ew. eine Methode den valorem in dem casu zu determiniren, da $f = 1$ und π in der gewöhnlichen Bedeutung genommen wird in hac formula?

$$\frac{\pi^2}{6f(f-1)} - \frac{(2f-1)}{f^2(f-1)^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{f}\right) + \frac{1}{f(f-1)^2}$$

Ich halte dafür, dass der valor quaesitus alsdann seyn werde

$$-\frac{\pi\pi}{6} + \left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \text{etc.}\right)$$

Wenn ich mich recht erinnere, so haben Sie mir ehemals eine Formul communiciret, welche die summas serierum, quarum formula est $\frac{1}{xx + fx}$, generaliter gibt, posito pro f numero quocunque etiam fracto; die Formul selbst aber ist mir vorjetzo nicht bekannt.

LETTRE LX.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Continuation sur les mêmes sujets.

Berlin d. 21. Mai 1745.

Aus der Verwandelung dieser Formul $4mn - m - 1 = aa$ in diese ähnliche $4Mn - M - 1 = AA$ facta substitutione $m = 4\nu - 1$, $\nu = 4nnM - n$ et $aa = 16n^2A^2$ kann ich nicht sehen, dass mehr folget als, si formula $4mn - m - 1$ quadrata nequeat esse casu $m = 4\nu - 1$, omnino quadratum esse non poterit; oder, wenn man demonstriren könnte, dass $4mn - m - 1$ nullo casu $m = 4\nu - 1$ ein Quadrat wäre, so wäre zugleich richtig erwiesen, dass eben dieselbe Formul nullo prorsus casu ein Quadrat seyn könnte. Hingegen kann diese Conclusion nicht zugegeben werden: omnes casus, quibus $4mn - m - 1$ sit quadratum, habere $m = 4\nu - 1$. Aber diese Consequenz hat wiederum ihre