F in omni sua amplitudine, quae aequatio F revera aequivalet aequationi E, sequitur, per casum $m=4\nu-1$, si impossibilis est in E, non magis excludi omnes casus possibiles aequationis F, quam omnes casus possibiles ipsius aequationis E, cum nullus casus possibilis reperiatur in E, quin sit assignabilis in F.

Dieses wird sich hoffentlich auch in dem von Ew vorgeschlagenen parallelismo mit der Formul $4nx-x+1$, deren casus quadrabilitatis ich nicht untersuchet habe, soutenirен. Wo nicht, so wird es mir lieb seyn die Sache ins künftige besser einzusehen. Ich danke indessen dienstl. für die in Ew. Schreiben enthaltenen schönen theoremata, wovon ich vielleicht künftig etwas zu melden Gelegenheit haben werde.

Goldbach.

P. S. Haben Ew. eine Methode den valorem in dem casu zu determiniren, da $f=1$ und π in der gewöhnlichen Bedeutung genommen wird in hac formula?

$$\frac{\pi^2}{6f(f-1)}-\frac{(2f-1)}{f^2(f-1)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{f}\right)+\frac{1}{f(f-1)^2}$$

Ich halte dafür, dass der valor quaesitus alsdann seyn werde

$$-\frac{\pi\pi}{6}+\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\text{etc.}\right)$$

Wenn ich mich recht erinnere, so haben Sie mir ehemals eine Formul communiciret, welche die summas serierum, quarum formula est $\frac{1}{xx+fx}$, generaliter gibt, posito pro f numero quocunque etiam fracto; die Formul selbst aber ist mir vorjetzo nicht bekannt.

LETTRE LX.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Continuation sur les mêmes sujets.

Berlin d. 21. Mai 1745.

Aus der Verwandelung dieser Formul $4mn-m-1=aa$ in diese ähnliche $4Mn-M-1=AA$ facta substitutione $m=4\nu-1$, $\nu=4nnM-n$ et $aa=16n^2A^2$ kann ich nicht sehen, dass mehr folget als, si formula $4mn-m-1$ quadrata nequeat esse casu $m=4\nu-1$, omnino quadratum esse non poterit; oder, wenn man demonstriren könnte, dass $4mn-m-1$ nullo casu $m=4\nu-1$ ein Quadrat wäre, so wäre zugleich richtig erwiesen, dass eben dieselbe Formul nullo prorsus casu ein Quadrat seyn könnte. Hingegen kann diese Conclusion nicht zugegeben werden: omnes casus, quibus $4mn-m-1$ sit quadratum, habere $m=4\nu-1$. Aber diese Consequenz hat wiederum ihre

Richtigkeit si cognitus esset casus, quo $4mn - m - 1 = \square$, neque tamen fuerit m numerus formae $4\nu - 1$, ex eo certe alius casus derivari posset, quo m esset numerus formae $4\nu - 1$. Um aber die Sach deutlicher zu machen, so will ich diese ähnliche Formul $9mn - m - 1 = aa$ betrachten, welche wenn man setzt $m = 9\nu - 1$, $\nu = 9nnM - n$ et $a = 9nA$ in diese $9Mn - M - 1 = AA$ verwandelt wird. Wenn man nun schliessen wollte diese Formul $9mn - m - 1$ könne kein quadratum seyn, nisi m sit numerus formae $9\nu - 1$, so würde die Unrichtigkeit dieses Schlusses sogleich erhellen, denn $9mn - m - 1$ wird ein quadratum in folgenden casibus:

$n = 2,\ m = 1$	$n = 3,\ m = 1$	$n = 6,\ m = 10$
$n = 2,\ m = 10$	$n = 3,\ m = 17$	$n = 6,\ m = 17$
$n = 2,\ m = 26$	$n = 3,\ m = 37$	$n = 6,\ m = 109$
$n = 2,\ m = 53$	$n = 3,\ m = 85$	$n = 6,\ m = 130$
etc.	etc.	etc.

woraus erhellet, dass $9mn - m - 1$ infinitis modis ein quadratum seyn könne, ohne dass m ein numerus hujus formae $9\nu - 1$ ist, ungeacht eben dasjenige raisonnement hier angebracht werden kann, welches bey der Formul $4mn - m - 1$ gemacht worden.

Dieses Jahr hat der Hr. Prof. Daniel Bernoulli das ganze praemium erhalten und meiner pièce ist das Accessit, jedoch ohne meinen Nahmen zuerkannt worden.

Nunmehr sind die opera Joh. Bernoullii omnia in vier Quart-Bänden fertig worden. Der Verleger, M. Bousquet, hat dieselben selbst biehergebracht und dem Könige ein magnifiq eingebundenes Exemplar praesentirt. Ich habe auch eins von dem Hn. Bernoulli zum Praesent erhalten. Die

3 ersten tomi enthalten alle seine Pièces, welche bisher hin und wieder gedruckt worden, der 4te aber die anecdota. Das Exemplar wird nicht anders als für 20 Rthlr. in Francfurt verkauft. M. Bousquet hat einen Contract mit mir geschlossen, kraft welches er alle meine Schriften, ausgenommen diejenigen, welche ich nach St. Petersburg zu schicken schuldig bin, drucken wird, und wird den Anfang mit dem tractatu de Isoperimetris machen. Er hätte gern mit der Scientia navali angefangen; ich muss aber erst vernehmen, ob die Akademie noch gesinnt seyn wird, dasselbe zu drucken.

Ew. problema de inveniendo valore hujus expressionis

$$P = \frac{\pi^2}{6n(n-1)} + \frac{1}{n(n-1)^2} - \frac{(2n-1)\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right)}{nn(n-1)^2}$$

casu quo $n = 1$ ist gewiss mit eines von den schwersten in dieser Art. Ich habe eben denjenigen valorem herausgebracht, welchen Ew. mir entdecket. Um denselben zu finden, habe ich gesetzet $n = 1 + \alpha$, denotante α numerum evanescentem. Sit enim hoc casu $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = Q$ atque formula proposita abibit in hanc

$$P = \frac{\pi\pi}{6\alpha(1+\alpha)} + \frac{1}{\alpha^2(1+\alpha)} - \frac{(1+2\alpha)Q}{\alpha^2(1+\alpha)^2} =$$
$$\frac{\pi\pi}{6}\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) + \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha} + 1 - Q(1 + 2\alpha)\left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{2}{\alpha} + 3\right) =$$
$$\frac{\pi\pi}{6\alpha} - \frac{\pi\pi}{6} + \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha} + 1 - Q\left(\frac{1}{\alpha^2} - 1\right).$$

Die ganze Sach kommt also auf den valorem ipsius Q an, posito $n = 1 + \alpha$. Diesen finde ich also: generaliter ist $Q = \int \frac{1 - x^n}{1 - x} dx$ si post integrationem ponatur $x = 1$. Denn es ist $\frac{1 - x^n}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \ldots x^{n-1}$ folglich

$$\int \frac{1-x^n}{1-x}dx = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n};$$

dahero, facto $x=1$, erit $Q = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$, wie angenommen worden. Nun setze ich $n = 1 + \alpha$, eritque $Q = \int \frac{1-x^{1+\alpha}}{1 \quad x} \cdot dx = \int \frac{1-x \cdot x^\alpha}{1-x}dx$. At cum sit generaliter $x^y = 1 + \frac{ylx}{1} + \frac{y^2(lx)^2}{1.2} + \frac{y^3(lx)^3}{1.2.3} +$ etc. erit

$$Q = \int \frac{dx}{1-x}\left(1 - x - \frac{\alpha x l x}{1} - \frac{\alpha^2 x (lx)^2}{1.2} - \frac{\alpha^3 x (lx)^3}{1.2.3} - \text{etc}\right) =$$

$$x - \alpha \int \frac{xdx}{1-x} lx - \frac{\alpha^2}{2}\int \frac{xdx}{1-x}(lx)^2 - \frac{\alpha^3}{6}\int \frac{xdx}{1-x}(lx)^3 - \text{etc.},$$

posito post singulas integrationes $x = 1$. Nun integrire ich eine jede Formul à part.

Primo est $\int \frac{xdx}{1-x} lx = \int dx(x + x^2 + x^3 + \text{etc.}) lx$; at generaliter est $\int x^m dx lx = -\frac{1}{(m+1)^2}$ posito post integrationem $x = 1$. Ergo erit $\int \frac{xdx}{1-x} lx = -\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} - \text{etc.} = -A + 1 = 1 - \frac{\pi\pi}{6}$ posito $A = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \text{etc.} = \frac{\pi\pi}{6}$.

Secundo est $\int \frac{xdx}{1-x}(lx)^2 = \int dx(x + x^2 + x^3 + \text{etc.})(lx)^2$; at est generaliter $\int x^m dx (lx)^2 = \frac{1.2}{(m+1)^3}$ posito $x = 1$, unde fit $\int \frac{xdx}{1-x}(lx)^2 = 2\left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \text{etc.}\right) = 2(B-1)$ posito $B = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \text{etc.}$

Tertio est $\int \frac{xdx}{1-x}(lx)^3 = \int dx(x + x^2 + x^3 + \text{etc.})(lx)^3$; at est generaliter $\int x^m dx (lx)^3 = -\frac{1.2.3}{(m+1)^4}$ posito $x = 1$, unde fit $\int \frac{xdx}{1-x}(lx)^3 = -6\left(\frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \text{etc.}\right) = -6(C-1)$ posito $C = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \text{etc.}$

Simili modo si ponatur $D = 1 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^5} + \text{etc.}$ et $E = 1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \text{etc.}$ reperietur tandem $Q = 1 + \alpha(A-1) - \alpha^2(B-1) + \alpha^3(C-1) - \text{etc.}$, hincque ob $A = \frac{\pi\pi}{6}$ erit

$$P = 1 - \frac{\pi\pi}{6} + \left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \text{etc.}\right)$$

wie Ew. gefunden haben.

Für die summa seriei $\frac{1}{xx+fx}$ habe ich eine formulam integralem schon längst gefunden; nun aber hat mich eben diese Untersuchung auf eine bequemere Expression geleitet, welche allem Ansehen nach Ew. bekannt seyn und Dieselben ebenfalls auf diese Materie geführt haben wird. Denn da, posito $x = f$, gefunden ist $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots \frac{1}{f+1} = 1 + f(A-1) - ff(B-1) + f^3(C-1) - \text{etc.}$ erit quoque $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{1+f} = 1 + \frac{f}{2(2+f)} + \frac{f}{3(3+f)} + \frac{f}{4(4+f)} + \text{etc.}$ Sit $S = \int \frac{1}{xx+fx} = \frac{1}{1(1+f)} + \frac{1}{2(2+f)} + \frac{1}{3(3+f)} + \text{etc.}$ erit $S = \frac{1}{f}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{f}\right) = \frac{1}{1+f} + (A-1) - f(B-1) + ff(C-1) - f^3(D-1) + \text{etc.}$

Euler.