LETTRE LXI.

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Continuation. Division infinie.

St. Petersburg d. 22 Juni st. n. 1748.

Ew. waren in Dero vorigem Schreiben der Meinung, dass Alles auf dem bewussten ersten lemmate beruhete, und wenn dasselbe seine Richtigkeit hätte, an der Demonstration des theorematis nicht das Geringste auszusetzen wäre. Ich wollte dahero in meinem letzten Briefe die Wahrheit des lemmatis primi darthun, und sehe auch, dass ich darin nicht übel réussiret, nachdem Ew. zugeben, *dass wenn man demonstriren könnte, dass* $4mn - m - 1$ *nullo casu* $m = 4v - 1$ *ein Quadrat wäre, zugleich richtig erwiesen seyn würde, dass eben dieselbe Formul nullo prorsus casu ein Quadrat seyn könnte*; dieses ist aber der einzige Inhalt des lemmatis primi. Ohngeachtet aber beyde lemmata ausser Zweifel sind, so

erkenne ich doch nunmehro, dass diese Demonstration aus einer andern Ursache nicht bestehen kann, denn es heisset daselbst: *aequatio C non potest fieri vera, nisi M sit numerus hujus formae* $4v - 1$ *(per lemma primum)*; dieses folget aber in der That aus dem lemmate primo nicht. Vielleicht findet sich künftig etwas Besseres

Die summam der Formul

$$P = \frac{\pi^2}{6n(n-1)} + \frac{1}{n(n-1)^2} - \frac{(2n-1)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\frac{1}{n}\right)}{n^2(n-1)^2}$$

casu, quo $n = 1$, welche Ew. durch eine so schöne und generale Methode heraus gebracht, hatte ich ganz ohngefähr und nur in selbigem casu particulari allein angemerket, denn weil die series

$$A \cdots \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3}\left(1+\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3.4}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\right)$$
$$+ \frac{1}{4.5}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}\right) + \text{etc.} = z =$$
$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \text{etc.}$$

aus nachfolgenden, numero infinitis seriebus bestehet

$$B \cdots \frac{1}{1.2.1} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.9} + \frac{1}{4.5\,16} + \text{etc.} = z + 1 - \frac{\pi\pi}{6}$$

$$C \cdots \frac{1}{2.3.1} + \frac{1}{3.4.4} + \frac{1}{4.5.9} + \frac{1}{5.6\,16} + \text{etc.} = \frac{1}{2.1^2} + \frac{\pi\pi}{2.1.6}$$
$$- \frac{3}{4.1^2}\left(1+\frac{1}{2}\right)$$

$$D \cdots \frac{1}{3.4.1} + \frac{1}{4.5\,4} + \frac{1}{5.6.9} + \frac{1}{6.7.16} + \text{etc.} = \frac{1}{3.2^2} + \frac{\pi\pi}{3.2.6}$$
$$- \frac{5}{9.2^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$$

etc.

und die summa generalis omnium serierum B, C, D etc. ist

$$\frac{\pi\pi}{6n(n-1)}+\frac{1}{n(n-1)^2}-\frac{(2n-1)}{n^2(n-1)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}\right),$$

so wird die summa seriei B (allwo $n=1$) $=z+1-\frac{\pi\pi}{6}$.

Diejenige Division, welche Ew. in Dero Schreiben vom 9 April angeführet haben, dienet, so viel ich sehe, nur dazu, dass man in dem quoto einen numerum non circulantem erhalte; dergleichen numeri non circulantes aber können auf unzählige andere Arten ohne solche mühsame Division gefunden werden, zum Ex. der numerus

1 . 1 . . 1 . . . 1 . . . . 1 etc. in inf.

ist gewiss non circulans, es mögen die loca vacua, quae punctis designata sunt, mit allen Zahlen nach Belieben (wenn es nur nicht lauter 1 in infinitum sind) ausgefüllt werden, als

$$\left.\begin{array}{l}10100100010000100000 1\ \text{etc.}\\ 121221222122221222\ \ 21\ \text{etc.}\\ 10123114112671135141\ \ \text{etc.}\\ \qquad\qquad\text{etc.}\end{array}\right\}\ \text{sind non circulantes.}$$

Es können alle fractiones rationales per denominatorem 10000 . . . . et numeratorem circulantem exprimiret werden, welche numeratores aber zweierley sind, 1) in quibus datur elementum initiale non circulans, 2) in quibus idem est elementum initiale, quod circulans, als z. Ex. $\frac{1}{2}+\frac{5\underline{0}}{1\underline{0}}$, allwo das elementum initiale non circulans ist 5, das unterstrichene elementum circulans ist 0

$\frac{1}{3}=\frac{\underline{3}}{1\underline{0}}$, allwo das elementum initiale und circulans idem ist, nehmlich 3.

$\frac{61}{162}=\frac{3\underline{765432198}}{1\underline{0}}$, allwo das elementum initiale $=3$, das elementum circulans $=765432198$. Es trifft sich auch

bisweilen, dass das elementum circulans aus so viel Ziffern bestehet, als in dem denominatore fractionis $\frac{1}{a+1}$ der numerus a unitates hat, ex. gr. si $a=22$, erit

$$\frac{1}{23}=\frac{\underline{0434782608695652173913}0}{1\underline{00}}.$$

Wenn man setzet

$(y^{-1}-1)(3^2y^{-1}-1)(5^2y^{-1}-1)(7^2y^{-1}-1)\dots((2n-1)^2y^{-1}-1)$ $=Y$ und $dY=Pdy$, so wird die formula $-\frac{Pdy}{Y}-n$ die summatrix tot terminorum seriei

$$A\dots\frac{1}{y^{-1}-1}+\frac{1}{3^2y^{-1}-1}+\frac{1}{5^2y^{-1}-1}+\text{etc.}$$

quot n continet unitates; est autem terminus generalis seriei $A=\frac{1}{(2x-1)^2y^{-1}-1}$, posita x pro exponente terminorum; igitur quia, si ponatur $y=\frac{1}{4}$, series A transit in

$$B\dots\frac{1}{1.3}+\frac{1}{5.7}+\frac{1}{9.11}+\frac{1}{13.15}+\text{etc.}$$

quae in infinitum continuata aequalis est semicirculo cujus diameter $=1$, erit seriei B summatrix $-\frac{Py}{Y}-n$, si differentiatione peracta ponatur $y=\frac{1}{4}$. Sit ex. gr. $n=2$, fiet

$$-\frac{Py}{Y}-2=\frac{10y^{-1}-2}{9y^{-2}-10y^{-1}+1}=\frac{10y-2y^2}{9-10y+y^2}=\frac{38}{105}.$$

[*Note marginale d'Euler:* $\frac{1}{1-p}+\frac{1}{3^2-p}+\frac{1}{5^2-p}+\frac{1}{7^2-p}+\text{etc.}$ $=\frac{\pi\sqrt{p}}{4p\cot\frac{\pi\sqrt{p}}{2}}$; $\frac{p}{1-p}+\frac{p}{3^2-p}+\frac{p}{5^2-p}+\text{etc.}=\frac{\pi\sqrt{p}}{4}\operatorname{tang}\frac{\pi\sqrt{p}}{2}$; $\frac{1}{y^{-1}-1}+\frac{1}{3^2y^{-1}-1}+\frac{1}{5^2y^{-1}-1}+\text{etc.}=\frac{\pi\sqrt{y}}{4}\operatorname{tang.}\frac{\pi\sqrt{y}}{2}$].

Es gibt unzählige quadrata, welche zu dieser Formul $C \ldots 4nn + 2(m-1)n + m - 1$, denontantibus m et n numeris integris affirmativis, nicht gebracht werden können, als 1^2, 2^2, 3^2, 5^2, 7^2, etc. Wenn man aber eine formulam infinitorum quadratorum ad formulam C non revocabilium geben könnte, so wäre auch das problema: invenire numerum primum dato quocunque majorem solviret.

Dato termino primo seriei $\frac{1}{a}$ et lege progressionis hac, ut dato quocunque termino $\frac{1}{A}$ fiat terminus sequens $= \frac{1}{A(A-1)+1}$, erit summa totius seriei $= \frac{1}{a-1}$.

Goldbach.

LETTRE LXII.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Continuation. Réponse à la lettre précédente.

Berlin d. 9 Juli 1843.

Ew. erstes lemma, worauf ich die ganze Demonstration gegründet zu seyn glaubte, hatte ich nicht sowohl nach den Worten, womit dasselbe ausgedrückt war, betrachtet, als nach der Application desselben in den nachfolgenden Propositionen und habe deswegen die ganze Demonstration aus eben demjenigen Grunde für unrichtig gehalten, welchen Ew. anjetzo selbst anzeigen. Denn ich gab zu, dass wenn $4mn - m - 1$ nullo casu $m = 4v - 1$ ein quadratum wäre, eben dieselbe Formul nullo prorsus casu ein quadratum seyn könnte. Ich zog aber diesen Satz, worin die Application bestund, in Zweifel: quod omnes casus, quibus unquam formula $4mn - m - 1$ quadratum fieri queat, ideo in hac