

Es gibt unzählige quadrata, welche zu dieser Formul
 $C...4nn + 2(m-1)n + m - 1$, denontantibus m et n nu-
 meris integris affirmativis, nicht gebracht werden können,
 als 1^2 , 2^2 , 3^2 , 5^2 , 7^2 , etc. Wenn man aber eine formulam
 infinitorum quadratorum ad formulam C non revocabilium
 geben könnte, so wäre auch das problema: invenire nume-
 rum primum dato quocunque majorem solviret.

Dato termino primo seriei $\frac{1}{a}$ et lege progressionis hac,
 ut dato quocunque termino $\frac{1}{a}$ fiat terminus sequens =
 $\frac{1}{A(A-1)+1}$, erit summa totius seriei $= \frac{1}{a-1}$.
 Goldbach.



LETTRE LXII.

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Continuation. Réponse à la lettre précédente.

Berlin d. 9 Juli 1843.

Ew. erstes lemma, worauf ich die ganze Demonstration
 gegründet zu seyn glaubte, hatte ich nicht sowohl nach den
 Worten, womit dasselbe ausgedrückt war, betrachtet, als
 nach der Application desselben in den nachfolgenden Pro-
 positionen und habe deswegen die ganze Demonstration aus
 eben demjenigen Grunde für unrichtig gehalten, welchen
 Ew. anjetzo selbst anzeigen. Denn ich gab zu, dass wenn
 $4mn - m - 1$ nullo casu $m = 4v - 1$ ein quadratum wäre,
 eben dieselbe Formul nullo prorsus casu ein quadratum
 seyn könnte. Ich zog aber diesen Satz, worin die Application
 bestund, in Zweifel: quod omnes casus, quibus unquam
 formula $4mn - m - 1$ quadratum fieri queat, ideo in hac

forma $m = 4v - 1$ contineantur. Die Unrichtigkeit dieser Application kann durch folgendes Exempel am deutlichsten eingesehen werden: Si demonstrari posset nullum numerum imparem esse quadratum, simul demonstratum foret, nullum prorsus numerum esse quadratum. Diese propositio hypothetica hat ihre völlige Richtigkeit; daraus aber folgt diese keineswegs: Ergo si ulli dantur numeri quadrati, ii omnes erunt numeri impares.

Die Art, nach welcher Ew. den schönen Satz, betreffend den valorem expressionis

$$\frac{\pi^2}{6n(n-1)} + \frac{1}{n(n-1)^2} - \frac{(2n-1)(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n})}{nn(n-1)^2}$$

casu $n = 1$, herausgebracht, ist sehr merkwürdig. Man kann auf eine ähnliche Art viel andere dergleichen schöne Sätze herausbringen. Als, da

$$\frac{1}{m(m-a)^2} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{(m-a)^2} - \frac{1}{aa} \left(\frac{1}{m-a} - \frac{1}{m} \right),$$

so wird seyn

$$B \dots \frac{1}{2 \cdot 1^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^2} + \frac{1}{4 \cdot 3^2} + \frac{1}{5 \cdot 4^2} + \text{etc.} = \frac{\pi^2}{1 \cdot 6} + \frac{1}{1^2} (1)$$

$$C \dots \frac{1}{3 \cdot 1^2} + \frac{1}{4 \cdot 2^2} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} + \frac{1}{6 \cdot 4^2} + \text{etc.} = \frac{\pi^2}{2 \cdot 6} - \frac{1}{2^2} \left(1 + \frac{1}{2} \right)$$

$$D \dots \frac{1}{4 \cdot 1^2} + \frac{1}{5 \cdot 2^2} + \frac{1}{6 \cdot 3^2} + \frac{1}{7 \cdot 4^2} + \text{etc.} = \frac{\pi^2}{3 \cdot 6} - \frac{1}{3^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right)$$

etc.

Erit ergo generaliter

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n \cdot 1^2} + \frac{1}{(n+1) \cdot 2^2} + \frac{1}{(n+2) \cdot 3^2} + \frac{1}{(n+3) \cdot 4^2} + \text{etc.} = \\ & \frac{\pi \pi}{(n-1) \cdot 6} - \frac{1}{(n-1)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} \right) = \\ & \frac{\pi \pi}{(n-1) \cdot 6} - \frac{1}{(n-1)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{n(n-1)^2}. \end{aligned}$$

Dahero muss dieser expressionis valor casu quo $n = 1$ die summam hujus seriei geben $1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \text{etc.}$

Ob diejenige Division, wodurch ich einen numerum in infinitum excurrentem non circulantem erhalten, in der That einigen Nutzen haben könne, will ich nicht bestimmen; ich dachte aber, wenn man auf eine solche Art diese Zahlen 3,14159265 etc. herausbringen könnte, die quadratura circuli für völlig gefunden gehalten werden könnte. Ew. Art numeros circulantes zu formiren war mir noch sehr wohl bekannt; es ist aber meines Erachtens dienlich, viel dergleichen Arten zu bemerken, um etwan mit der Zeit eine solche zu entdecken, wodurch die quadratura circuli ausgedrückt werden könnte. Es findet sich aber in Ew. Art noch eine gewisse Ordnung, dergleichen in den Zahlen 3,14159 etc. allem Ansehen nach nicht stattfindet. Dass alle numeri rationales in fractiones decimales circulantes (das elementum initiale ausgenommen) resolvirt werden, ist eine proprietas essentialis numerorum rationalium, und es ist leicht zu sehen, dass das elementum circularis fractionis decimalis ex hac fractione $\frac{a}{b+1}$ ortae niemals mehr als b Figuren enthalte; denn wenn man wirklich dividirt, so können nicht mehr als b -erley residua überbleiben, so oft man aber gleiche residua bekommt, so oft circulirt der quotus.

Die expressio summatrix, welche Ew. für diese seriem

$$\frac{1}{y^{-1}-1} + \frac{1}{3^2 y^{-1}-1} + \frac{1}{5^2 y^{-1}-1} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2 y^{-1}-1}$$

geben, kann in vielen Fällen sehr nützlich seyn. Es können aber immer aus factoribus per differentiationem series summabiles gefunden werden. Die von Ew. gefundene Summ bringe ich solchergestalt heraus. Cum sit

$$(y^{-1}-1)(3^2 y^{-1}-1)(5^2 y^{-1}-1) \dots ((2n-1)^2 y^{-1}-1) = Y,$$

erit

$$lY = l(y^{-1}-1) + l(3^2y^{-1}-1) + l(5^2y^{-1}-1) + \dots + l((2n-1)^2y^{-1}-1) \\ = l(1-y) + l(3^2-y) + l(5^2-y) + \dots + l((2n-1)^2-y) - nly$$

sumantur differentialia, eritque

$$\frac{dY}{Y} = \frac{Pdy}{Y} = -\frac{dy}{1-y} - \frac{dy}{3^2-y} - \frac{dy}{5^2-y} - \dots - \frac{dy}{(2n-1)^2-y} - \frac{ndy}{y}$$

Multiplicetur per $-\frac{y}{dy}$ erit $-\frac{Py}{Y} - n =$

$$\frac{1}{y^{-1}-1} + \frac{1}{3^2y^{-1}-1} + \frac{1}{5^2y^{-1}-1} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2y^{-1}-1} \dots = A$$

Um aber auf diese Art einen numerum terminorum finitum zu summiren, so deucht mir, dass die additio actualis nicht schwerer seyn würde, als die Execution dieser Methode. Wollte man aber diese seriem in infinitum excurrentem summiren, so würde man auf diese Art um so viel weniger gewinnen, da man die summam hujus seriei A alsdann absolute anzeigen kann. Denn man suche einen angulum α , qui sit ad angulum rectum ut $\sqrt{y}$ ad 1; sit porro radius ad tangentem hujus anguli α ut 1 ad θ , dico fore

$\frac{1}{y^{-1}-1} + \frac{1}{3^2y^{-1}-1} + \frac{1}{5^2y^{-1}-1} + \text{etc. in infinitum} = \frac{\theta\pi\sqrt{y}}{4}$,
tenente π valorem consuetum 3,14159265 etc. Ich kann auch die summam hujus seriei angeben

$$\frac{1}{y^{-1}+1} + \frac{1}{3^2y^{-1}+1} + \frac{1}{5^2y^{-1}+1} + \text{etc. inf.} = P$$

Sit enim

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

ac ponatur $e^{\pi\sqrt{y}} = \theta$, seu sit $l.\theta = \pi\sqrt{y}$, eritque summa quaesita $P = \frac{\theta-1}{\theta+1} \cdot \frac{\pi\sqrt{y}}{4}$. Est vero quoque

$$\theta = 1 + \frac{\pi\sqrt{y}}{1} + \frac{\pi^2y}{1.2} + \frac{\pi^3y\sqrt{y}}{1.2.3} + \frac{\pi^4y^2}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

Vel ponatur $\frac{1}{4}\pi\pi y = n$, erit sequenti modo

$$2P = \frac{n}{1 + \frac{n}{3 + \frac{n}{5 + \frac{n}{7 + \frac{n}{9 + \frac{n}{11 + \text{etc.}}}}}}}$$

Diese Expression ist eine fractio continua, von welcher Materie etliche Dissertationen im akademischen Archiv liegen, um deren Copie ich letzters angehalten, weilen ich das Meiste vergessen, und bei mir nirgend angemerkt finde.

Was für Quadratzahlen in dieser Expression

$$4n^2 + 2(2m-1)n + m-1$$

nicht enthalten sind, ist schwer zu sagen, indem diejenigen quadrata, welche darin enthalten sind, nicht anders, als durch unendlich viel Formeln ausgedruckt werden können. Für das erste habe ich gleich gesehen, dass alle biquadrata in dieser Formel enthalten sind. Hernach kann ich unendlich viel series numerorum geben, deren quadrata in dieser Expression $4n^2 + 2(2m-1)n + m-1$ enthalten sind: nemlich alle Quadratzahlen, welche in nachfolgenden formulis enthalten sind, werden zugleich in obiger Expression begriffen: $(5p \pm 1)^2$; $(13p \pm 4)^2$; $(17p \pm 2)^2$; $(29p \pm 6)^2$; $(37p \pm 3)^2$; $(41p \pm 16)^2$; $(53p \pm 15)^2$; $(61p \pm 25)^2$; $(73p \pm 23)^2$; $(89p \pm 17)^2$; $(97p \pm 11)^2$; $(101p \pm 5)^2$; $(109p \pm 38)^2$; $(113p \pm 49)^2$; $(137p \pm 50)^2$; $(149p \pm 22)^2$; $(157p \pm 14)^2$; $(173p \pm 40)^2$; $(181p \pm 81)^2$; $(193p \pm 56)^2$; $(197p \pm 7)^2$; $(229p \pm 61)^2$ etc.

Diejenigen quadrata aber, welche in keiner von diesen Formeln enthalten sind, sind allein diejenigen, welche Ew.

Expression nicht in sich begreift. Es käme also darauf an, wie man auf leichte Art alle diejenigen Zahlen finden solle, welche in keiner der obigen Formeln begriffen sind, und da würde man freylich das problema, de inveniendō numero primo, dato majore, leicht solviren können. Denn wenn man setzt $4n^2 + 2(2m - 1)n + m - 1 = aa$, so wird $4m = -4n + 3 + \frac{4aa + 1}{4n + 1}$. Wenn also $4aa + 1$ ein numerus primus ist, so kann das quadratum aa nicht in jener Expression enthalten seyn, und hinwiederum alle quadrata aa , welche nicht in $4n^2 + 2(2m - 1)n + m - 1$ enthalten, sind von dieser Beschaffenheit, dass $4aa + 1$ ein numerus primus ist. Da nun $4b^4 + 1$ nimmer ein numerus primus ist, sondern allzeit zwey oder mehr divisores formae $4n + 1$ hat, so sind auch alle numeri biquadrati in Ew. Expression enthalten. Ich erinnere mich, dass ich einmal eine Tabelle gemacht von allen Zahlen bis auf 1000, deren quadrata unitate aucta numeri primi sind*), wovon der Hr. Prof. Krafft Ew. eine Abschrift gemacht. Dieselbe Tabelle habe ich fast aus einem gleichen Grund verfertigt, als Ew. bey Dero Formul ohne Zweifel vor Augen gehabt haben.

Wenn $4n + 1$ ein numerus primus ist, so ist derselbe immer eine summa duorum quadratorum, idque unico modo. Es gibt aber allzeit unendlich viel quadrata, quae unitate aucta sint per $4n + 1$ divisibilia. Alle diese quadrata können nun leicht in einer formula generali exprimirt werden folgendergestalt: Sit $4n + 1 = r^2 + s^2$, erunt utique r et s numeri inter se primi. Formetur fractio $\frac{r}{s}$ et quaeratur in minoribus numeris fractio proxime accedens $\frac{p}{q}$, ita ut

*) Voir à la fin de cette lettre.

$ps - qr$ sit ± 1 (der Bruch $\frac{p}{q}$ kann aber durch eine von mir gegebene Methode allzeit leicht gefunden werden). Tum ponatur $pr + qs = k$, atque dico omnes numeros, quorum quadrata unitate aucta sint per $4n + 1$ divisibilia, contineri in hac forma $(4n + 1)m \pm k$. Sic

1. Omnes numeri, quorum quadrata unitate aucta sint divisibilia per 5 continentur in formula $5m \pm 2$.
 2. Si sit $aa + 1$ divisibile per 13 erit $a = 13m \pm 5$.
 3. Si sit $aa + 1$ divisibile per 17 erit $a = 17m \pm 4$.
 4. Si sit $aa + 1$ divisibile per 29 erit $a = 29m \pm 12$.
- etc.

Exemplum. Quaerantur omnes numeri, quorum quadrata unitate aucta sint divisibilia per numerum primum 1381. Cum sit $1381 = 15^2 + 34^2$, quaeratur fractio $\frac{p}{q}$ tam prope accedens ad $\frac{15}{34}$, ut differentiae numerator fiat $= 1$. Ad hoc cum duobus numeris 15 et 34 instituatur operatio, qua maximus communis divisor quaeri solet, hoc modo

$$\begin{array}{r|l}
 15 & 34 \quad 2 \\
 & 4 \quad 15 \quad 3 \\
 & & 3 \quad 4 \quad 1 \\
 & & & 1 \quad 3 \quad 3
 \end{array}$$

Ex quotis 2, 3, 1, 3 formetur sequens fractionum series

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{1}{7}, \frac{3}{9}, \frac{15}{34}$$

incipiendo ab $\frac{0}{1}$; hac lege ut quisque numerator per indi-

cem supra scriptum multiplicatus cum numeratore praecedente, praebeat numeratorem sequentem, similique modo denominator quisque per indicem suprascriptum multiplicatus cum praecedente denominatore, praebeat denominatorem sequentem. Hoc modo ultima fractio $\frac{15}{52}$ semper erit ipsa pro-

posita, penultima vero erit ea proxime accedens $\frac{p}{q}$, quam quaero. Jam ergo erit $k = 4 \cdot 15 + 9 \cdot 34 = 366$, unde omnes numeri, quorum quadrata unitate aucta sunt per 1381 divisibilia, continentur in hac forma $1381m \pm 366$.

Ew. summatio seriei $\frac{1}{a} + \dots + \frac{1}{A} + \frac{1}{A(A-1)+1}$ ist so merkwürdig, dass ich anfänglich darüber erstaunet bin, indem diese series so stark convergirt und die grössten exponentes ipsius a in den denominatoribus nach der progressionem geometrica dupla aufsteigen, dergleichen series summabiles sehr rar sind. Ich habe aber nach einigem Nachsinnen bald diese Demonstration gefunden. Sit

$$\frac{1}{a-1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b-1} \text{ erit } b = a(a-1) + 1$$

$$\text{porro } \frac{1}{b-1} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c-1} \text{ erit } c = b(b-1) + 1$$

$$\frac{1}{c-1} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d-1} \text{ erit } d = c(c-1) + 1$$

etc.

Ergo fiet $\frac{1}{a-1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \text{etc.}$ welches Ew. series ist.

Euler.

Addition à la marge.

Einige numeri primi, so grösser sind als 1000000, welche ich durch obige Methode leicht gefunden, sind: 1008017; 1020101; 1073297; 1110917; 1123601; 1136357; 1144901;

1196837; 1201217; hi enim numeri sunt formae $aa + 1$, neque ullum habent divisorem primum formae $4n + 1$.

Feuille volante appartenant à cette lettre.

Catalogus numerorum a , ex quibus fit $4aa + 1$ numerus primus:

1, 2, 3, 5, 7, 8, 10, 12, 13, 18, 20, 27, 28, 33, 37, 42, 45, 47, 55, 58, 60, 62, 63, 65, 67, 73, 75, 78, 80, 85, 88, 90, 92, 102, 103, 105, 112, 115, 118, 120, 125, 128, 130, 132, 135, 140, 142, 150, 153, 157, 163, 170, 175, 192, 193, 198, 200, 203, 210, 215, 218, 220, 222, 232, 233, 235, 237, 245, 248, 268, 272, 278, 285, 288, 292, 297, 317, 318, 322, 323, 327, 337, 340, 343, 345, 348, 350, 352, 357, 358, 370, 375, 380, 382, 390, 392, 408, 413, 422, 430, 432, 445, 453, 455, 460, 465, 468, 473, 475, 480, 483, 493, 502, 505, 518, 527, 530, 533, 535, 547, 548.

Sollte in diesen Zahlen eine series regularis enthalten seyn, so wäre das problema de inveniendis numero primo, datum numerum excedente, leicht solvirt. Es kommt mir aber diese series eben so confus vor, als die series numerorum primorum ipsa.