$\frac{1}{A(A-1)+1}$, erit summa seriei $\frac{1}{a-1}$; ich erinnere mich aber nicht mehr, worin meine Demonstration bestanden, und danke Ew. desfalls um so viel mehr, dass Sie mir die Ihrige communiciren wollen, welche ganz evident ist. Sonst halte auch bey dieser serie die leichte Art, dato termino quocunque die summam ipsius seriei usque ad hunc terminum zu finden, für merkwürdig. Sit terminus quicunque datus $\frac{1}{A}$, erit summa ejusdem et omnium sequentium terminorum $= \frac{1}{A-1}$, summa vero ipsius seriei usque ad hunc terminum $\frac{1}{A}$ exclusive erit $\frac{1}{a-1} - \frac{1}{A-1}$.

Dass H. Rasumovsky und H. Teplov bey Ew. logiren und sich noch eine Zeit lang in Berlin aufhalten werden, ist mir sehr lieb; Ew. werden hiedurch nicht allein Gelegenheit haben die Russische Sprache ferner zu excoliren, sondern auch die hiesigen nova academica von denselben recht frisch erhalten können.

Goldbach.

LETTRE LXIV.

Euler à Goldbach.

Sommaire Réponse aux articles de la lettre précédente.

Berlin d. 24 August 1745.

Wenn $4mn - m - 1$ in einem Fall ein quadratum wäre, so würde man gleich unendlich viel andere casus daraus finden können. Wenn nun Ew. annehmen, dass aa das kleinste quadratum sey, welches in formula $4mn - m - 1$ enthalten ist, so muss nothwendig a kleiner seyn als m, und daher haben die 5 ersten propositiones ihre völlige Richtigkeit. Wenn aber Ew. ferner zu dieser Aequation fortgehen $4n(m - a + n) - m - 1 = (a - 2n)^2$, weilen dieselben nicht in der vorgelegten Form $4mn - m - 1$ enthalten ist, so folgt auch nicht, dass $(a - 2n)^2$ kleiner seyn müsse als a^2, denn $4mn - m - 1$ könnte das kleinste mögliche quadratum geben, ungeacht $4n(m - a + n) - m - 1$ einem noch kleinern quadrato gleich wäre, und also kommt mir die 8te Proposition verdächtig vor, weilen non obstante hypothesi aa grösser seyn kann als $(a-2n)^2$.

Bey diesem tentamine fällt mir ein, ob man dieses theorema nicht etwan auf eine gleiche Art demonstriren könnte, wie man zu erweisen pflegt, dass a^4+b^4 oder a^4-b^4 kein quadratum seyn könne. Man nimmt nehmlich an dari casum, quo a^4+b^4 sit numerus quadratus, puta $=mm$, und leitet daher einen andern $c^4+d^4=nn$, dergestalt dass $n<m$. Auf diese Weise zeigt man, dass wenn ein quadratum quantumvis magnum mm eine summa duorum biquadratorum wäre, man daraus sogleich ein kleineres nn, und daher ferner ein kleineres, und so fort finden könnte. Man nimmt aber als ein postulatum an, dass in numeris parvis kein casus satisfaciens begriffen sey. Weil nun ebenfalls gewiss ist, dass in numeris parvis $4mn-m-1$ kein Quadrat seyn könne, so würde die Demonstration auf folgende Art vollkommen richtig seyn:

I. Ponamus dari quadratum aa qui in forma $4mn-m-1$ contineatur.

II. Inde inveniri posset alius quadratus bb minor quam aa, qui pariter in forma $4mn-m-1$ esset contentus.

III. Continuo ergo ad numeros quadratos minores perveniretur, quod foret absurdum.

Die ganze Demonstration würde also auf den IIten Satz ankommen: an concesso quadrato aa, aliud minus bb ex eo inveniri possit, quod in forma $4mn-m-1$ contineatur.

Ew. bin für die Communication Dero Idee über die seriem $\frac{a}{1}+\frac{b}{10}+\frac{c}{100}+\frac{d}{1000}+$ etc. sehr verbunden, denn auf solche Art werden öfters grosse und beschwerliche Zahlen

leicht ausgedrückt werden können. Um diese Zahl 1,141592 durch sieben terminos zu bekommen, brauchen Ew. diesen terminum generalem $\frac{2xx-4x+12}{10^x}$. Ich glaube aber Dieselben haben sich verschrieben, indem 7 termini hujus seriei nicht mehr geben als 1,1412882. Die verlangte Zahl kommt aber heraus wenn man diesen terminum generalem $\frac{10-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}x^3}{10^x}$ annimmt.

Ich habe neulich eine expressionem indefinitam gefunden, wodurch der valor ipsius π ausgedrückt wird. In circulo, cujus radius $=1$, capiatur arcus quicunque u, cujus cosinus $=a$ et sinus $=\alpha$; sit autem sinus arcus $2u=\beta$, $\sin.3u=\gamma$, $\sin.4u=\delta$, $\sin.5u=\varepsilon$ etc. His positis dico fore $\frac{\pi}{2}=u+a\alpha+\frac{1}{2}a^2\beta+\frac{1}{3}a^5\gamma+\frac{1}{4}a^4\delta+$ etc. Setzt man $u=\frac{\pi}{4}$, ob $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\beta=1$, $\gamma=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\delta=0$, $\varepsilon=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ etc. findet man folgende seriem

$$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.2}+\frac{1}{2.2^2}-\frac{1}{5.2^3}-\frac{1}{6.2^3}-\frac{1}{7.2^4}+\frac{1}{9.2^5}+\frac{1}{10.2^5}+\frac{1}{11.2^6}-\text{etc.}$$

welche ziemlich stark convergirt.

Diese Aequation $\frac{1}{m(m-a)^2}=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{(m-a)^2}-\frac{1}{aa}\left(\frac{1}{m-a}-\frac{1}{m}\right)$ hatte ich, wo ich nicht irre, zu diesem Ende angeführt, um die summam hujus seriei

$$\frac{1}{(a+1)1^2}+\frac{1}{(a+2)2^2}+\frac{1}{(a+3)3^2}+\frac{1}{(a+4)4^2}+\text{etc.}$$

desto leichter zu finden, denn im ersten termino ist $m=a+1$, im zweiten $m=a+2$, im dritten ist $m=a+3$ und so fort, dahero diese series sogleich in diese resolvirt wird

$$\frac{1}{a}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^4}+\text{etc.}\right)=\frac{\pi^2}{6a}$$
$$-\frac{1}{aa}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{a+1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{a+2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{a+3}+\text{etc.}\right)$$
$$=-\frac{1}{aa}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{a}\right),$$

welche summas Ew. in Dero letztem Schreiben, allem Ansehen nach, auf eine andere Art gefunden haben.

Dass alle numeri quadrati aa, welche in dieser Formul $4nn + 2(2m-1)n + m - 1$ oder in dieser $4MN + M + N$ (welche mit jener übereinkommt ponendo $N = n$ et $M = n + m - 1$) nicht enthalten sind, einen numerum primum für $4aa + 1$ geben, ist klar. Denn wenn

$$aa = 4n^2 (2m-1)n + m - 1 = 4MN + M + N,$$

so wird

$$4aa + 1 = (4n + 4m - 3)(4n + 1) = (4M + 1)(4N + 1)$$

und hat folglich Factoren. Wenn also $4aa + 1$ ein numerus primus ist, so kann aa in obgedachten formulis nicht enthalten seyn. Ich zweifle aber sehr, ob durch solche formulas exclusivas jemals etwas herausgebracht werden wird, indem darin die ganze Kenntniss, welche wir von den numeris primis haben, gegründet ist; denn auf gleiche Art kann man sagen, dass alle numeri, welche nicht in dieser Formel $mn + m + n + 1$ enthalten sind, numeri primi seyen.

Ich zweifle auch sehr, ob die valores von m, wenn $4m - 1$ ein numerus primus ist, eine solche gewisse Eigenschaft haben, dergleichen statt findet, wenn $4m + 1$ ein numerus primus ist. Denn dass m nicht immer sey ein duplum quadratum + numero trigonali, wenn $4m - 1$ ein numerus primus ist, erhellet aus dem casu $4m - 1 = 79$; dann wird $m = 20$, welche Zahl die vermuthete Eigenschaft nicht hat.

Euler.

LETTRE LXV.

Goldbach à Euler.

Sommaire. Nouvel amendement à la démonstration précédente. Séries représentant la valeur de π. Divers sujets.

St. Petersburg d. 28 Sept. 1743.

Aus Ew. Erinnerung gegen die vorige Demonstration, habe ich die prop. 6 ipsius demonstrationis allerdings unrichtig befunden; dahero ich dieselbe nebst den darauf folgenden in meinem letzten Schreiben auszustreichen und an deren Stelle folgende zu substituiren bitte:

6. Ad hanc aequationem $(4n-1)m - 1 = aa$ ex utraque parte addatur $-2a(4n-1) + (4n-1)^2$, fiet

$$(4n-1)(m - 2a + 4n - 1) - 1 = (a - (4n-1))^2.$$

7. Quoniam vero aa est quadratum minimum quaesito satisfaciens ex hypothesi, erit $aa < (a - 4n + 1)^2$, vel $aa =$ eidem, sed aequale esse non potest ob $4n = 1$, erit ergo $(-2a + (4n-1))(4n-1) > 0$, ergo $(4n-1) > 2a$; est