$$\frac{1}{a}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^4}+\text{etc.}\right)=\frac{\pi^2}{6a}$$
$$-\frac{1}{aa}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{a+1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{a+2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{a+3}+\text{etc.}\right)$$
$$=-\frac{1}{aa}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{a}\right),$$

welche summas Ew. in Dero letztem Schreiben, allem Ansehen nach, auf eine andere Art gefunden haben.

Dass alle numeri quadrati aa, welche in dieser Formul $4nn+2(2m-1)n+m-1$ oder in dieser $4MN+M+N$ (welche mit jener übereinkommt ponendo $N=n$ et $M=n+m-1$) nicht enthalten sind, einen numerum primum für $4aa+1$ geben, ist klar. Denn wenn

$$aa=4n^2(2m-1)n+m-1=4MN+M+N,$$

so wird

$$4aa+1=(4n+4m-3)(4n+1)=(4M+1)(4N+1)$$

und hat folglich Factoren. Wenn also $4aa+1$ ein numerus primus ist, so kann aa in obgedachten formulis nicht enthalten seyn. Ich zweifle aber sehr, ob durch solche formulas exclusivas jemals etwas herausgebracht werden wird, indem darin die ganze Kenntniss, welche wir von den numeris primis haben, gegründet ist; denn auf gleiche Art kann man sagen, dass alle numeri, welche nicht in dieser Formel $mn+m+n+1$ enthalten sind, numeri primi seyen.

Ich zweifle auch sehr, ob die valores von m, wenn $4m-1$ ein numerus primus ist, eine solche gewisse Eigenschaft haben, dergleichen statt findet, wenn $4m+1$ ein numerus primus ist. Denn dass m nicht immer sey ein duplum quadratum + numero trigonali, wenn $4m-1$ ein numerus primus ist, erhellet aus dem casu $4m-1=79$; dann wird $m=20$, welche Zahl die vermuthete Eigenschaft nicht hat.

Euler.

LETTRE LXV.

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Nouvel amendement à la démonstration précédente. Séries représentant la valeur de π. Divers sujets.

St. Petersburg d. 28 Sept. 1743.

Aus Ew. Erinnerung gegen die vorige Demonstration, habe ich die prop. 6 ipsius demonstrationis allerdings unrichtig befunden; dahero ich dieselbe nebst den darauf folgenden in meinem letzten Schreiben auszustreichen und an deren Stelle folgende zu substituiren bitte:

6. Ad hanc aequationem $(4n-1)m-1=aa$ ex utraque parte addatur $-2a(4n-1)+(4n-1)^2$, fiet

$$(4n-1)(m-2a+4n-1)-1=(a-(4n-1))^2.$$

7. Quoniam vero aa est quadratum minimum quaesito satisfaciens ex hypothesi, erit $aa<(a-4n+1)^2$, vel $aa=$ eidem, sed aequale esse non potest ob $4n\pm1$, erit ergo $(-2a+(4n-1))(4n-1)>0$, ergo $(4n-1)>2a$; est

autem ex hypothesi $4n - 1 = \frac{aa+1}{m}$, ergo $\frac{aa+1}{m} > 2a$, seu $aa > 2am - 1$, seu $a > 2m - \frac{1}{a}$.

8. Sed per prop. 5 patet esse $a < m$, ergo $m > 2m - \frac{1}{a}$, quod est absurdum si m et a sint integri, quod absurdum sequeretur ex $4mn - m - 1 = aa$.

Vor einigen Tagen fielen mir unterschiedene propositiones ein, die bey dem ersten Anblick schwer zu demonstriren scheinen möchten, ex. gr., wenn ich setze

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \text{etc.} = A$$

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \text{etc.} = B$$

$$1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \text{etc.} = C \text{ et sic porro,}$$

$$\text{erit } \frac{\pi}{2} = A + \frac{B}{2} + \frac{C}{4} + \frac{D}{8} + \text{etc.}$$

Vel si ponatur

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \text{etc.} = \beta$$

$$1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \text{etc.} = \gamma$$

$$1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \text{etc.} = \delta \text{ et sic porro}$$

$$\text{erit } \frac{\pi}{2} = \beta + \frac{\gamma}{4} + \frac{\delta}{4^2} + \frac{\varepsilon}{4^3} + \text{etc.}$$

Wenn ich eine seriem mache, in deren terminis der numerator perpetuus ist 1, die denominatores aber aus allen numeris possibilibus omnium potestatum bestehen, folgendergestalt:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} \pm \frac{1}{9} + \frac{1}{16} \pm \frac{1}{25} \pm \frac{1}{27} + \frac{1}{32} + \text{etc.}$$

so wird die summa seriei in casu signi superioris seyn 1; in casu signi inferioris autem (quod omnibus denominatoribus imparibus praefigitur) erit summa seriei $2l2 - 1$.

Was Ew. bey der formula der 7 terminorum, welche 1,141592 machen, erinnert haben, ist ganz richtig; die andere Formul war aus Versehen dahin geschrieben.

Ob es zwar sehr leicht ist zu demonstriren, dass eine formula algebraica bujusmodi $a + bx + cxx + dx^3 +$ etc. lauter numeros primos geben kann, posita x pro exponente terminorum, die coëfficientes a, b, c, etc. mögen numeri integri quicunque seyn, so gibt es doch formulas, welche vor vielen andern eine Menge numerorum primorum in sich halten; dergleichen ist die series $xx + 19x - 19$, so in den ersten 47 terminis nur vier numeros non primos hat.

Gleichwie in casu $4m + 1 =$ numero primo, m est $=$ duobus triangularibus $+ \square$, so könnte dennoch wohl seyn in casu $4m - 1 =$ numero primo, dass $m =$ duobus quadratis $+ \triangle$ wäre, uti $20 = 1 + 4 + 15$, wiewohl ich es noch nicht probiret und fernerer Untersuchung anheimstelle.

Diese beyden propositiones: dass $8n + 3$ allezeit in drey quadrata, und n in tres trigonales resolvirt werden kann, sind aequivalentes und concessa una, sequitur altera.

Es scheinet mir sehr probable, dass wenn in der obgedachten Formul $xx + 19x - 19$ vor x gesetzt wird 2^m, alsdann posito m numero quocunque integro affirmativo, allezeit ein numerus primus herauskommt; wenn aber dieses auch wäre, würde es doch schwer zu demonstriren seyn; ingleichen, dass dieselbe Formul $x^2 + 19x - 19$ keinen divisorem hujusmodi $10n + 1$ hat.

Goldbach.