LETTRE LXVI.

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. La démonstration du théorème $4mn - m - 1 = aa$ approuvée. Démonstration de celui-ci $4mn - m - n = aa$. Autres théorèmes analogues. Séries pour $\frac{\pi}{2}$ et autres. Théorèmes de nombres.

Berlin d. 15 October 1743

Nunmehr hat Ew. Demonstration, dass $(4n-1)m - 1 = aa$ ihre völlige Richtigkeit; denn da Dieselben vorher erwiesen, dass posito aa omnium quadratorum, si quae darentur, minimo, seyn müsse $m > a$, anjetzo aber pro eodem casu, dass $(4n-1) > 2a$, so muss folglich seyn $(4n-1)m > 2a^2$; nun aber ist $(4n-1)m = aa+1$ und wäre also $aa+1 > 2aa$, welches nicht seyn kann nisi sit $a = 0$ vel $a = 1$ (denn hier muss das Zeichen $>$ nicht *majus*, sondern *non minus* heissen). Wenn man aber setzt vel $a = 0$, vel $a = 1$, so wird die Aequation $(4n-1)m - 1 = aa$ unmöglich. Ich muss gestehen, dass ich nicht geglaubt hatte, dass dieses theorema auf eine so leichte und schöne Art bewiesen wer-

den könnte, und bin daher versichert, dass die meisten theoremata Fermatii auf eine gleiche Art bewiesen werden können, weswegen ich Ew. um so viel mehr für die Communication dieser herrlichen Demonstration verbunden bin. Ungeacht nun daraus folget, dass auch diese Formul $4mn - m - n$ kein Quadrat seyn könne, so habe ich doch nach Ew. Anleitung darüber folgende Demonstration gemacht:

Qui negat veritatem propositionis $4mn - m - n = aa$, is statuere debet dari quadratum aa minimum, cui formula $4mn - m - n$ aequari possit. Sit ergo aa hoc quadratum minimum, sitque $4mn-m-n = aa$ erit $(4m-1)(4n-1)-1 = 4aa$ Addatur utrinque $-8a(4n-1) + 4(4n-1)^2$, erit $(4m-1-8a+4(4n-1))(4n-1)-1 = 4(a-4n+1)^2 = \square$. Quod cum praecedente minus esse nequeat, sequitur $(4m-1-8a+4(4n-1))(4n-1) > (4m-1)(4n-1)$ ideoque $4n-1 > 2a$ (ubi signum $>$ significat *non minus*). Simili modo demonstrabitur esse $4m-1 > 2a$. Sit ergo $4m-1 = 2a+p$ et $4n-1 = 2a+q$ eritque $p > 0$ et $q > 0$, unde fiet $(4m-1)(4n-1) = 4aa + 2a(p+q) + pq$. At est $(4m-1)(4n-1) = 4aa+1$ et ideo $2a(p+q)+pq = 1$, quod fieri nequit nisi sit $a = 0$ et $p = 1$ et $q = 1$. Verum aliunde constat esse non posse $a = 0$; quamobrem non datur quadratum minimum aa formulae $4mn-m-n$ aequale et consequenter haec formula quadratum nullo modo esse potest. Q. E. D.

Ich habe noch einen grossen Vorrath von dergleichen theorematis, welcher Demonstration, wenn solche auf gleiche Art sollte herausgebracht werden können, gewiss nicht wenig zu Erweiterung dieser Wissenschaft beytragen würde. Diese theoremata, wie ich sie der Ordnung nach herausgebracht habe, sind folgende, nehmlich alle nachfolgenden formulae können nullo modo numeros quadratos geben

I. $4mn-1(m+n)$	XV. $20mn-1(m+n)$	XXVII. $24mn-1(m+n)$
II. $4mn-3(m+n$	XVI. $20mn-3(m+n)$	XXVIII. $24mn-5(m+n)$
	XVII. $20mn\pm 3(m-n)$	XXIX. $24mn-7(m+n)$
III. $8mn-1(m+n)$	XVIII. $20mn-7(m+n)$	XXX. $24mn\pm 7(m-n)$
IV. $8mn-3(m+n)$	XIX. $20mn\pm 7(m-n)$	XXXI. $24mn-11(m+n)$
V. $8mn\pm 3(m-n)$	XX. $20mn-9(m+n)$	XXXII. $24mn\pm 11(m-n)$
VI. $8mn\pm 5(m-n)$	XXI. $20mn+11(m+n)$	XXXIII. $24mn\pm 13(m-n)$
VII. $8mn+5(m+n)$	XXII. $20mn\pm 13(m-n)$	XXXIV. $24mn+13(m-n)$
VIII. $8mn+7(m+n)$	XXIII. $20mn+13(m+n)$	XXXV. $24mn\pm 17(m-n)$
	XXIV. $20mn\pm 17(m-n)$	XXXVI. $24mn+17(m+n)$
IX. $12mn-1(m+n)$	XXV. $20mn+17(m+n)$	XXXVII. $24mn+19(m+n)$
X. $12mn+5(m+n)$	XXVI. $20mn+19(m+n)$	XXXVIII. $24mn+23(m+n)$
XI. $12mn\pm 5(m+n)$		etc.
XII. $12mn\pm 7(m+n)$		
XIII. $12mn-7(m+n)$		
XIV. $12mn-11(m+n)$		

ferner ist auch $7mn-m-n=aa$.

Ausser diesen habe ich auch noch einige, welche generaler sind, als $4kmn-m-n=\square$, oder auf folgende Art exprimirt:

Theorema. Existente mn divisore quocunque numeri N dico formulam $4N-m-n$ quadratum nunquam esse posse.

Hernach kann auch diese Formul

$$4(4k+1)mn-(8k+1)(m+n)$$

nimmer ein quadratum geben.

Die theoremata, welche Ew., durch unendlich viel series den valorem $\frac{\pi}{2}$ zu exprimiren, gefunden, waren mir schon längst bekannt, denn da $\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}-\frac{2}{3}+\frac{2}{5}-\frac{2}{7}+$ etc. so wird seyn

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{2-1}-\frac{2}{4-1}+\frac{2}{6-1}-\frac{2}{8-1}+\text{etc. oder}$$

$$\frac{\pi}{2}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2-\frac{1}{2}}+\frac{1}{3-\frac{1}{2}}-\frac{1}{4-\frac{1}{3}}+\text{etc.}$$

Wenn nun ein jeglicher terminus in progressionem geometricam resolvirt wird, so kommt

$$\frac{\pi}{2}=\left.\begin{aligned}&1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\text{etc.}\\&-\frac{1}{2}-\frac{1}{2.4}-\frac{1}{2^2.8}-\frac{1}{2^3.16}-\frac{1}{2^4.32}-\text{etc.}\\&+\frac{1}{3}+\frac{1}{2.9}+\frac{1}{2^2.27}+\frac{1}{2^3.81}+\frac{1}{2^4.243}+\text{etc.}\\&\qquad\text{etc.}\end{aligned}\right\}=$$

$$=\left\{\begin{aligned}&+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\text{etc.}\\&+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\frac{1}{25}-\text{etc.}\right)\\&-\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{8}+\frac{1}{27}-\frac{1}{64}+\frac{1}{125}-\text{etc.}\right)\\&+\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{16}+\frac{1}{81}-\frac{1}{256}+\frac{1}{625}-\text{etc.}\right)\\&\qquad\text{etc.}\end{aligned}\right.$$

Gleichergestalt, da $\frac{\pi}{2}=\frac{4}{1.3}+\frac{4}{5.7}+\frac{4}{9.11}+$ etc., so wird seyn $\frac{\pi}{2}=\frac{4}{2^2-1}+\frac{4}{6^2-1}+\frac{4}{10^2-1}+\text{etc.}=\frac{1}{1^2-\frac{1}{4}}+\frac{1}{3^2-\frac{1}{4}}+\frac{1}{5^2-\frac{1}{4}}+$ etc. Wenn nun ein jeglicher terminus in eine seriem geometricam resolvirt wird, so kommt Ew. andere Expression heraus

$$\frac{\pi}{2}=\begin{aligned}&1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\text{etc.}\\&+\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\text{etc.}\right)\\&+\frac{1}{16}\left(1+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{7^6}+\text{etc.}\right)\\&\qquad\text{etc.}\end{aligned}$$

In der serie

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} \pm \frac{1}{9} + \frac{1}{16} \pm \frac{1}{25} \pm \frac{1}{27} + \frac{1}{32} + \frac{1}{36} + \text{etc.},$$

wovon Ew. casu signorum superiorum die Summ $= 1$, at casu signorum inferiorum die Summ $= 2l2 - 1$ angeben, wird ein Versehen seyn, indem alle denominatores unitate minui debebant. Alsdann aber kommen eben diejenigen theoremata heraus, welche Ew. mir schon längst communiciret und gütigst erlaubet, dieselben nebst Dero Demonstration im 9$^{\text{ten}}$ tomo zu publiciren.

Die series, deren terminus generalis ist $xx + 19(x-1)$, ist in der That wegen der häufigen numerorum primorum, so darin vorkommen, sehr merkwürdig. Inzwischen finden sich doch die numeri compositi um so viel häufiger ein, je weiter man die seriem continuirt. Denn da in den ersten 47 terminis nur 4 numeri non primi vorkommen, so kommen in den ersten 75 terminis schon 14 numeri non primi hervor. So weit habe ich diese seriem continuirt, und dieses war genug, um Ew. beyden Muthmassungen über die Beschaffenheit dieser Progression zu widerlegen. Denn erstlich habe ich gesehen, dass nicht immer ein numerus primus herauskommt, wenn vor x eine potestas binarii gesetzt wird: der 64$^{\text{te}}$ terminus ist $5293 = 67.79$. Hernach weiset aber der 73 terminus $6697 = 37.181$, dass die divisores formae $10n + 1$ nicht excludirt werden. Was im übrigen die divisores terminorum hujus seriei anlangt, so ist zu merken, dass keine andern stattfinden, als welche zugleich divisores numerorum hujus formae $19aa - 23bb$ sind und vicissim.

Ew. Observation, dass, wenn $4m - 1 =$ numero primo, auch m ein numerus sey ex duobus quadratis et triangulari compositus, kann ich weder refutiren noch demonstriren, indem ich noch nicht einmal einen numerum habe finden können, der nicht in duo quadrata et numerum trigonalem resolubilis wäre, zum wenigsten gibt es unter 100 keinen. Sollten nun alle numeri diese Eigenschaft haben, so hätte auch diese Observation ihre Richtigkeit, aber auf eine solche Art, als wenn ich sagen wollte, dass m immer eine summa trium trigonalium oder quatuor quadratorum wäre. Dass diese beyden Propositionen: $8m + 3 =$ summae $3\,\square$ et $m =$ summae $3\,\triangle$ aequivalentes sind, ist leicht einzusehen, und dependiret eben davon auch die Demonstration, dass omnis numerus summa 4 quadratorum sey. Denn, si $m = \frac{aa+a}{2} + \frac{bb+b}{2} + \frac{cc+c}{2}$ erit $8m + 3 = (2a+1)^2 + (2b+1)^2 + (2c+1)^2$, folglich ist immer $8m + 4$ eine summa quatuor quadratorum, und ferner ejus quadrans $2m + 1$, folglich omnis numerus impar, et per consequens omnis omnino numerus erit in 4 quadrata resolubilis. Bey dieser Form $8m + 3$ ist zu merken, dass so oft dieselbe ein numerus primus ist, auch in dieser Form $2aa + bb$ enthalten sey. Um dieses und andere dergleichen theoremata zu beweisen, kommt das meiste auf folgende lemmata an, wovon ich noch keine rechte Demonstration habe finden können:

I. Si numerus integer n non sit summa duorum quadratorum integrorum, talis quoque non erit in fractis, seu nullus numerus npp in duo quadrata integra resolvi poterit. Atque vicissim, si npp fuerit summa duorum quadratorum, etiam numerus n erit summa duorum quadratorum, idque in integris.

II. Si numerus n non fuerit summa 3 quadratorum in integris, etiam talis non erit in fractis.

III. Si numerus npp fuerit summa 4 quadratorum, erit quoque numerus n summa 4 quadratorum integrorum cyphra non exclusa.

Ich kann mich nicht erinnern ob Ew. nachfolgende Expression bekannt ist

$$a^m - \frac{n}{1}(a+b)^m + \frac{n(n-1)}{1.2}(a+2b)^m - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(a+3b)^m + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}(a+4b)^m - \text{etc.}$$

Wenn m und n numeri integri sind und $m < n$, so ist die ganze Expression immer $= 0$.

Nachfolgendes theorema scheint mir auch merkwürdig zu seyn: Si fuerit $aa + 4n$ numerus primus $= p$, atque d sit divisor quicunque numeri n, erit p numerus in hac forma $dxx + yy$ contentus (idque unico modo). Ex. gr. sit $n = 30$; sumto $a = 11$, fit $4n + aa = 241 = p$. Continetur ergo numerus 241 in sequentibus formis $xx + yy$; $2xx + yy$; $3xx + yy$; $5xx + yy$; $6xx + yy$; $10xx + yy$; $15xx + yy$; $30xx + yy$; in unaquaque autem semel tantum continetur.

Gleich wie eine summa duorum quadratorum inter se primorum $aa + bb$ keine andere divisores haben kann, als welche in dieser Form $4n + 1$ enthalten sind; also kann ich auch demonstriren, dass alle divisores formae $a^4 + b^4$ in dieser Formul $8n + 1$ enthalten sind; gleichergestalt, dass alle divisores von $a^8 + b^8$ numeri hujus formae $16n + 1$ seyn müssen. Et generaliter

Numerorum in hac forma $a^{2^m} + b^{2^m}$ contentorum alii divisores non dantur, nisi hujus naturae $2^{m+1}n + 1$.

Wenn diese factores in infinitum wirklich mit einander multiplicirt werden $(1-n)(1-n^2)(1-n^3)(1-n^4)(1-n^5)$ etc., so kommt nachfolgende series heraus

$$1 - n^1 - n^2 + n^5 + n^7 - n^{12} - n^{15} + n^{22} + n^{26} - n^{35} - n^{40} + n^{51} + n^{57} - \text{etc.}$$

wovon per inductionem leicht erhellet, dass omnes termini in hac forma $n^{\frac{3xx \pm x}{2}}$ begriffen sind, und das signum $+$ praefixum haben, wenn x ein numerus par, das signum $-$ aber, wenn x ein numerus impar ist. Ich habe aber noch keine Methode finden können, wodurch ich die Identität dieser zwey Expressionen demonstriren könnte. Der Hr. Prof. Nicolaus Bernoulli hat auch praeter inductionem nichts darüber herausbringen können.

Euler.