LETTRE LXVIII.

=

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Mêmes sujets. Problème de la géométrie des courbes.

Berlin d. 21. Januar 1744.

— — Ausser den vorher gemeldten theorematibus über die formulas, quae quadratos numeros praebere nequeunt, habe ich seit der Zeit in dieser Materie nichts anders angemerkt, als dass diese Formul $2abc - b - c$ kein quadratum seyn könne, si vel b vel c fuerit numerus impar formae $4n-1$. Ferner kann auch diese Formul $2abc - b + c$ kein Quadrat seyn, si fuerit a numerus impar et b numerus vel hujus $4n+1$ vel $4n+2$ formae. Hernach kann auch $2abc+b\pm c$ nimmer ein quadratum seyn, si fuerit a numerus impar et b vel hujus formae $4n-1$, vel hujus $4n-2$. Ich kann aber von allen diesen Propositionen noch keine andere völlig demonstriren, als diejenigen, welche aus $4mn-m-n = aa$

fliessen, und welche Ew. folglich auch durch Dero letztgemeldte Methode demonstriren können.

Ich kann noch nicht einsehen, dass kein Schreibfehler in der von Ew. letztangeführten serie

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\pm\frac{1}{9}+\frac{1}{16}\pm\frac{1}{25}\pm\frac{1}{27}+\frac{1}{32}+\text{etc.}$$

sollte unterlaufen seyn. Denn da Ew. gefunden, dass

$$1=\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\frac{1}{26}+\text{etc.}$$

so muss diese series $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+$ etc. nothwendig kleiner als 1 seyn, indem sogar der defectus angegeben werden kann, welcher ist

$$\frac{1}{3.4}+\frac{1}{7.8}+\frac{1}{8.9}+\frac{1}{15.16}+\frac{1}{24.25}+\text{etc.}$$

Gleichergestalt da fest demonstrirt worden, dass

$$2l2-1=\frac{1}{3}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{15}-\frac{1}{24}-\frac{1}{26}+\frac{1}{31}+\text{etc.},$$

so kann ja eben diese series, si singuli denominatores unitate augeantur, unmöglich eben diese Summ $2l2-1$ haben. Dahero noch mehr in meiner Meinung gestärket werde, dass Ew. vergessen die denominatores um 1 zu vermindern.

Dass diese series

$$a^m - n(a+b)^m + \frac{n(n-1)}{1.2}(a+2b)^m - \text{etc.} = 0$$

si fuerit $n > m$, erhellet ex natura serierum recurrentium. Denn da alle progressiones algebraicae ad genus recurrentium gehören, dergestalt dass ein jeder terminus ex aliquot praecedentibus determinirt werden kann, so muss auch diese series a^m, $(a+b)^m$, $(a+2b)^m$, etc. eine series recurrens seyn, und ein beständiges Verhältniss zwischen einem jeden termino und einigen vorhergehenden Statt finden. Dieses kann sogar infinitis modis geschehen, indem die scala relationis seyn kann $1 - n + \frac{n(n-1)}{1.2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \text{etc.}$, wenn nur $n > m$.

Ich zweifle sehr, ob man eine leichtere Demonstration davon wird finden können, als diese, welche ex natura serierum recurrentium von selbsten folgt, denn wenn man sich schon per inductionem von der Wahrheit davon überführet, so sieht man doch nicht den Weg, so dazu geführet, ein.

Ew. Reflexion über die Expression $(1 - n)(1 - n^2)(1 - n^3)$ etc. in Ansehung eines factoris $(1 - n^{\frac{1}{2}})(1 - n^{\frac{3}{2}})(1 - n^{\frac{5}{2}})$ etc. also, dass das factum, si evolvatur, eine gleiche Abwechselung der signorum + et — gebe, könnte vielleicht bey andern Untersuchungen einigen Vortheil bringen; allein in der serie, welche ich daraus hergeleitet, habe ich daraus noch keinen Nutzen ziehen können.

Man siehet hier schon seit mehr als 8 Tagen einen ziemlich grossen Cometen, welcher, da er in coelo fast gar keinen motum zu haben und doch immer grösser zu werden scheinet, allem Ansehen nach genau auf die Erde zugehet.

In den Actis Lips. M. Nov. ist ein problema proponirt worden solches Inhalts: Circa data duo puncta (Fig. 8.) E et F lineam curvam describere hujusmodi ut si ex duobus ejus punctis quibusvis A et B ad illa puncta E et F ducantur rectae, area AEB futura sit semper proportionalis angulo AFB. Vel si corpus in peripheria hujus curvae revolvatur, ut areae, quas circa punctum E describit, proportionales sint angulis, quos circa alterum punctum F absolvit.

Euler.

LETTRE LXIX.

Goldbach à Euler.

Sommaire. Réponse à la précédente.

Moscau d. 12. März. st. n. 1744.

Das problema, dessen Ew. aus den Actis Lips. Erwähnung thun, werden Sie ohne Zweifel schon solviret haben. So viel ich sehe hat die curva unter andern diese Eigenschaft, dass wenn sie durch eine rectam quamcunque per punctum F (Fig. 8) transeuntem in zwey Theile getheilet, und von demjenigen Theile, in welchem das punctum E stehet, das triangulum rectilineum AEB abgezogen wird, das trilineum residuum AEB allezeit eine aream constantem, areae dimidiae totius curvae aequalem habe, oder dass die pars curvae $EAGB$ allezeit = sey der parti curvae $EAHB$.

Die vermeinten summae serierum sind allerdings aus einem offenbaren Fehler entstanden.