LETTRE LXXII.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Réponse à la précédente. Leçons du calcul différentiel. Mémoires de Berlin. Logogryphe à déchiffrer.

Berlin d. 4. Juli 1744.

Dass diese Formul $emn..fm..gn$ generaliter ein quadratum seyn könne, wenn nur entweder f oder g ein numerus affirmativus ist, wie Ew. angemerket haben, kann mit meinen vormals überschriebenen theorematibus gar wohl bestehen. Dieselben waren zweyerley, entweder von dieser Form $4emn - pm - pn$, oder von dieser $4emn \pm pm \mp pn$. Die erstere leidet nun durch Ew. Observation keine Noth; die letztere aber würde umgestossen, wenn nicht eine Condition hinzugethan werden müsste, davon ich mich nicht mehr erinnere, ob ich in meinem Briefe damals Meldung gethan habe, oder nicht. Nehmlich es müssen m und n respectu p primi seyn. Wenn ich also sage, dass $8mn - 3m + 3n$

nimmer ein Quadrat seyn könne, so muss diese Condition dabei gemeldet werden, dass n kein multiplum 3[r] sey. Denn wenn man dürfte $n = 3$ oder überhaupt $n = 3hh$ setzen, so könnte diese Formul $8mn - 3m + 3n$ infinitis modis ein Quadrat seyn. Diese Restriction folget unmittelbar aus der Art, welche mich dazu geführet, und welche ich auch in der pièce, so ich vor einiger Zeit über diese Materie nach St. Petersburg geschickt habe, ausdrücklich angemerkt. Denn $8mn - 3m + 3n$ kann deswegen kein Quadrat seyn, weil diese Formul $aa - 2bb$ keinen divisorem primum hujus formae $8n \pm 3$ haben kann. Dahero werden diejenigen casus ausgenommen, wenn n ein multiplum von 3 ist, eben wie auch in jener $aa - 2bb$ diese Condition hinzugethan werden muss, dass a und b numeri inter se primi seyn sollen. Denn ohne diese Restriction könnte $aa - 2bb$ per quemcunque numerum divisibilis seyn.

Ich arbeite anjetzo an einem Tractat über den calculum differentialem, in welchem ich verschiedene curieuse Decouverten über die series gemacht habe, wovon ich die Freyheit nehme Ew. einige zu communiciren:

I. Sumto in circulo arcu quocunque a, cujus sinus sit $= \alpha$, sinus arcus dupli $= \beta$, sinus arcus tripli $= \gamma$, sinus quadrupli $= \delta$, quintupli $= \varepsilon$ etc. dico hujus seriei infinitae $\frac{1}{2}a + \alpha + \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{3}\gamma + \frac{1}{4}\delta + \frac{1}{5}\varepsilon +$ etc. summam semper exprimere longitudinem arcus 90° in eodem circulo.

II. Posito radio circuli $= 1$, atque arcus cujuscunque a statuatur ut sequitur $\sin a = \alpha$, $\sin 2a = \beta$, $\sin 3a = \gamma$, $\sin 4a = \delta$, $\sin 5a = \varepsilon$ etc., $\cos a = A$, $\cos 2a = B$, $\cos 3a = C$, $\cos 4a = D$, $\cos 5a = E$ etc. sitque π longitudo semicircumferentiae, erit

$$\frac{\alpha}{A}+\frac{\beta}{2A^2}+\frac{\gamma}{3A^3}+\frac{\delta}{4A^4}+\frac{\varepsilon}{5A^5}+\text{etc.}=\frac{\pi}{2}$$

$$1+\frac{A}{A}+\frac{B}{A^2}+\frac{C}{A^3}+\frac{D}{A^4}+\frac{E}{A^5}+\text{etc.}=0$$

$$1+A+B+C+D+E+\text{etc.}=\frac{1}{2}$$

III. Nachfolgende series sind ex divisione arcus entsprungen.

Posito radio $=1$, sumatur arcus quicunque $=s$, cujus sinus sit $=a$, cosinus dimidii arcus sit $=\alpha$, $\cos\frac{1}{4}s=\beta$, $\cos\frac{1}{8}s=\gamma$, $\cos\frac{1}{16}s=\delta$ etc. erit

$$s=\frac{a}{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\text{ etc.}}.$$

IV. Si ponatur arcus cujuscunque s tangens $=A$, $\operatorname{tang}\frac{1}{2}s=B$, $\operatorname{tang}\frac{1}{4}s=C$, $\operatorname{tang}\frac{1}{8}s=D$, $\operatorname{tang}\frac{1}{16}s=E$ etc. erit

$$\frac{1}{2}B+\frac{1}{4}C+\frac{1}{8}D+\frac{1}{16}E+\text{etc.}=\frac{1}{s}-\frac{1}{A}.$$

V. Si cognita fuerit summa hujus seriei

$$a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+\text{etc.}$$

quam ponam $=z$; dico semper assignari posse summam hujus seriei

$$Aa+Bbx+Ccx^2+Ddx^3+Eex^4+Ffx^5+\text{etc.}$$

dummodo series horum coëfficientium A, B, C, D, E, etc. tandem habeat differentias constantes. Sit enim $B-A=P$, $C-2B+A=Q$, $D-3C+3B-A=R$ etc. Deinde quia z datur per x, statuatur $\frac{dz}{dx}=p$, $\frac{dp}{dx}=q$, $\frac{dq}{dx}=r$, $\frac{dr}{dx}=s$ etc. Hisque valoribus inventis erit seriei

$$Aa+Bbx+Ccx^2+Ddx^3+\text{etc.}$$

summa $=Az+Ppx+\frac{1}{2}Qqx^2+\frac{1}{6}Rrx^3+\frac{1}{24}Ssx^4+\text{etc.}$

Sit exempl. gr. $z=1+x+x^2+x^3+x^4+\text{etc.}=\frac{1}{1-x}$ erit $\frac{dz}{dx}=\frac{1}{(1-x)^2}=p$, $\frac{dp}{dx}=\frac{2}{(1-x)^3}=q$, $\frac{dq}{dx}=\frac{6}{(1-x)^4}=r$ etc. et pro A, B, C, D, etc. sumatur haec series

$$1,\ 3,\ 7,\ 13,\ 21,\ 31,\ 43 \text{ etc.}$$
$$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12$$
$$2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,$$
$$0,\ 0,\ 0,\ 0$$

deren formula generalis ist $nn-n+1$; davon die Differenzen genommen, wird $A=1$, $P=2$, $Q=2$, $R=0$, $S=0$ etc., folglich ist die summa seriei

$$1+3x+7x^2+13x^3+21x^4+31x^5+\text{etc.}=\frac{1}{1-x}+\frac{2x}{(1-x)^2}+\frac{2x^2}{(1-x)^3}.$$

Gleich wie man vermittelst der Newton'schen Evolution des binomii alle aequationum purarum $x^n-A=0$ radices per series infinitas exprimiren kann, so habe ich auf eine ähnliche Methode gedacht, um aller aequationum affectarum radices gleichfalls per series infinitas zu exprimiren. Es sey gegeben diese Aequation

$$x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+Cx^{n-3}+\text{etc.}=0,$$

deren eine radix sey $x=f$, welche ich folgendergestalt per seriem exprimire. Ich setze

$$x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+Cx^{n-3}+\text{etc.}=y$$

und suche per differentiationem die valores folgender Quantitäten $p=\frac{dx}{dy}$, $q=\frac{dp}{dy}$, $r=\frac{dq}{dy}$, $s=\frac{dr}{dy}$ etc., welche alle in x gegeben seyn werden. Nun nehme man nach Belieben für x einen valorem determinatum an, und bestimme daraus die valores von y, p, q, r, s etc. quo facto summa hujus seriei $x-py+\frac{1}{2}qy^2-\frac{1}{6}ry^3+\frac{1}{24}sy^4-$ etc. semper aequalis erit uni radici aequationis propositae

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \text{etc.} = 0.$$

Nimmt man nun für x einen solchen Werth an, welcher einer radici schon sehr nahe kommt, so wird die series convergens und weiset die radicem proxime.

Man kann diese Proposition auch folgendergestalt ausdrücken. Si fuerit

$$y = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \text{etc.}$$

hincque definiantur sequentes quantitates $p = \frac{dx}{dy}$, $q = \frac{dp}{dy}$, $r = \frac{dq}{dy}$, $s = \frac{dr}{dy}$ etc. ex quibus formetur haec series

$$x - py + \frac{1}{2} qy^2 - \frac{1}{6} ry^3 + \frac{1}{24} sy^4 - \text{etc.}$$

dico hujus seriei summam, quicunque valor pro x ponatur, semper aequari uni radici hujus aequationis

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \text{etc.} = 0.$$

Wenn man sich eine lineam curvam vorstellet von dieser Natur

die abscissae sind 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, etc.
die applicatae 1, 1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, etc.

dergestalt, dass, wenn die abscissa gesetzt wird $= x$, die applicata wird $y = 1.2.3.4 \ldots x$, so kann diese curva per infinita puncta leicht beschrieben werden. Wenn ich mich recht erinnere, so haben Ew. mir einmal Anlass gegeben auf diese curvam zu denken. Unlängst, da mir diese Materie wiederum vorkam, so habe ich die naturam dieser krummen Linie durch folgende aequationem differentialem exprimirt: Man setze

$$A = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \text{etc.} = 1,644934066848$$

$$B = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \text{etc.} = 1,202056903159$$

$$C = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \text{etc.} = 1,082323233711$$

$$D = 1 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^5} + \text{etc.} = 1,036927755106$$

$$E = 1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \text{etc.} = 1,017343061984$$

$$F = 1 + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{3^7} + \frac{1}{4^7} + \text{etc.} = 1,008349277386$$

etc.

und ferner sey $n = 0,5772156649$, so wird seyn

$$\frac{dy}{ydx} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{x} - n,$$

woraus die positio tangentis, so oft x ein numerus integer ist, erkannt wird. Wenn aber x ein numerus fractus oder irrationalis, so dienet diese aequatio infinita:

$$\frac{dy}{ydx} = Ax - Bx^2 + Cx^3 - Dx^4 + Ex^5 - \text{etc.} - n$$

oder auch diese

$$\frac{dy}{ydx} = \frac{x}{1+x} + \frac{x}{4+2x} + \frac{x}{9+3x} + \frac{x}{16+4x} + \frac{x}{25+5x} + \text{etc.} - n.$$

Aus der Figur dieser curvae ist leicht zu sehen, dass dieselbe eine applicatam minimam inter abscissas 0 et 1 haben muss. Wenn man nun setzt $dy = 0$, so kommt proxime heraus $x = 0,46096$ oder $x = \frac{6}{13}$. Um aber aus einer jeden abscissa x die gehörige applicatam y zu finden, so habe ich diese logarithmische Aequation herausgebracht

$$ly = \frac{1}{2} l2\pi + (x + \frac{1}{2}) lx - x + \frac{1}{1.2x} - \frac{1}{3.4.5.6x^3} + \frac{1}{5.6.7.6x^5} - \frac{3}{7.8.9.10x^7} + \text{etc.}$$

Wenn also x eine sehr grosse Zahl ist, so ist proxime $y = \frac{x^{x+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}{e^x}$, posito $e = 2,7182818$. Setzt man aber

$$x - \frac{1}{1.2.3.2x} + \frac{1}{3.4.5.6x^3} - \frac{1}{5.6.7.6x^5} + \frac{3}{7.8.9.10x^7} - \text{etc.} = z,$$

so ist accurat

$$y = \frac{x^x\sqrt{2\pi x}}{e^z} = 1.2.3.4\ldots x.$$

Was diejenigen hiesigen Gelehrten betrifft, von welchen Ew. einige Nachricht erwarten, so habe die Ehre zu melden, dass M. Jordan, welcher vormals ein französischer Prediger gewesen, sich hauptsächlich auf die Literatur applicirt und eine schöne Bibliothec sammelt, indem ihm der König alle Bücher, welche Ihro Majestät gesandt werden, darein schenkt. Dass der Marquis d'Argens bloss von den belles-lettres fait macht, wird Ew. genugsam bekannt seyn, und ungeacht er jetzt anfängt auch physicalische Materien mit unter seine Schriften zu mengen, so ist doch nichts Gründliches davon anzutreffen. Der Graf Algarotti ist schon lange Zeit nicht mehr hier und hat nach den letzten Zeitungen Dienste bey dem König von Polen genommen. M. Deschamps ist ein purer Wolfianer, und weilen ich weder mit ihm in genauer Bekanntschaft stehe, noch seine Schriften gelesen habe, so habe ich ihn durch einen Freund fragen lassen, worin er praetendire den Hugenium critiquirt zu haben. Hierauf hat er nun geantwortet, dass solches über sein ratiocinium sur la probabilité gewesen sey, weilen er vermeint hätte, der Hr. Wolf hätte solches auch schon critisirt, da er aber seit der Zeit gesehen, dass des Hn. Wolfs Worte anders verstanden werden müssen, so ziehe er seine Critic wieder zurück.

Die Akademie in Paris hat dieses Jahr das praemium gar nicht ausgegeben, sondern eben dieselbe Quaestion vom Magneten wiederum auf A. 1746 proponirt, mit einem dreifachen Preise von 7500 livres. Ich habe mir aber vorgenommen nicht ferner darüber zu concurriren, sondern meine Dissertation nächstens allhier drucken zu lassen. *)

So favorable das judicium in den Hamburgischen Zeitungen über des Hn. Prof. Knutzen Meinung von dem letzten Cometen ist, so ist doch sowohl der Grund, als seine Ausführung völlig falsch. Er nimmt erstlich an, dass dieser Comet ein tempus periodicum von $45^3/_4$ Jahren habe, weil er aus dem catalogo Heveliano gesehen, dass fast immer nach Verfliessung dieses intervalli ein Comet erschienen. Ferner glaubt er, dass der Comet von 1698 eben derselbe gewesen, der A. 1652 gesehen worden, da man doch, wenn man die Sach genau untersuchet, kaum zwey Cometen finden wird, welche so viel von einander differiren, als diese zwey. Hernach ist auch der letzte Comet von diesen beyden so stark unterschieden, dass man mit eben der raison den Mercurium für den Saturnum halten könnte, wenn man nicht öfter beyde zugleich am Himmel sähe. Ich habe auch dem Hn. Prof. Knutzen alle diese Gründe überschrieben, wogegen er nichts anders einzuwenden findet, als dass gleichwohl seine Meinung oder Prophezeyung eingetroffen, und dass er fast nicht glauben könne, dass solches par hasard geschehen. Ich habe über diesen Cometen eine weitläufige Dissertation geschrieben, welche jetzt bald wird gedruckt seyn, darin ich den Lauf dieses Cometen auf das Genaueste bestimmet und ganz deutlich gewiesen, dass sein tempus periodicum sich über etliche saecula erstrecke: wie sich denn auch unter allen Cometen, so seit 700 Jahren observirt werden, keiner findet, dessen Lauf nur im Geringsten mit dem letzten übereinkäme.

*) Cette dissertation est publiée dans le tome V du Recueil des pièces qui ont remporté le prix de l'Académie de Paris.

Die Théorie de la figure de la terre par M. Clairaut ist in der That ein unvergleichliches Werk, sowohl in Ansehung der profunden und schweren Quaestionen, welche darin abgehandelt werden, als der angenehmen und leichten Methode, nach welcher er die sublimsten Sachen ganz klar und deutlich vorzubringen weiss.

Ob mein Tractat de problemate isoperimetrico in Lausanne schon völlig gedruckt ist, habe ich noch keine Nachricht erhalten. Ich habe inzwischen ein neues Werk dahin geschickt unter dem Titul *Introductio ad analysin infinitorum*, worin ich sowohl den partem sublimiorem der Algeber als der Geometrie abgehandelt und eine grosse Menge schwerer problematum ohne den calculum infinitesimalem resolvirt, wovon fast nichts anderswo anzutreffen. Nachdem ich mir einen Plan von einem vollständigen Tractat über die analysis infinitorum formirt hatte, so habe ich bemerkt, dass sehr viele Sachen, welche dazu eigentlich nicht gehören, und nirgend abgehandelt gefunden werden, vorhergehen müssten, und aus denselben ist dieses Werk als prodromus ad analysin infinitorum entstanden.

Die neue Akademie allhier wird nächstens einen tomum von den darin abgelesenen Pièces herausgeben. Es wird darin eine grosse Anzahl Pièces von mir kommen. Weilen nun die Herren Staats-Ministri fleissig zugegen sind, so habe, um diesen Herren keinen Ekel zu erwecken, meine Dissertationen französisch abgelesen, nachdem solche von dem Herrn Prof. Naudé corrigirt worden. Ich habe auch um dieser Ursach willen pure mathematische Speculationen und calculos zu evitiren gesucht, und mehrentheils physikalische Materien abgehandelt. Darunter befindet sich eine neue Theorie von dem Licht und Farben, wodurch ich alle phaenomena auf das Deutlichste erkläre und alle Schwierigkeiten, welchen andere Theorien unterworfen sind, vermeide. Hernach habe ich demonstrirt, dass die Forcen, welche von einem Stoss oder Schlag herkommen, jederzeit mit einer blossen Pression comparirt werden können, oder dass die vires vivae und mortuae unter sich homogeneae seyen. Ich habe auch ex natura gravitatis dargethan, dass die ultimae moleculae omnium corporum unter sich alle gleich dicht oder eandem gravitatem specificam haben müssen, wodurch das principium indiscernibilium einigen keinen geringen Stoss zu leiden scheinet.

Ich habe vor einiger Zeit nachfolgenden logogryphum entworfen, worin alle characteres Buchstaben bedeuten und der Text latein ist:

*Pxqſwlznjdvynſtiddkqxhleebfpxdfgtlzbccſbkſodxo
kfnglqxnſchejmlckzxhrfwjgfhxvzjnbgyxcdgixkoxj
mlncoigdxvzflmeſnfyjqfangvnylrcxfonbfjalrkwſnbf
pjoizoxqknubroſadgiaxwkcbrbcklofrnjwngſzfhgjfc
bcfvqjtxeevtbzfyjsbzhſmlnbgſsqjwglnxvzfkonbcoigd
xvrkfjalzxtſnilenfgvcboofcfxnnfgnkbcjnnjynxvplgn
bfzfoxeejdgxbcjcnſdyvdbhzlnvyxmbcblobbcyfekonb
ceiobfplwsxzxfjcndbhrlzqxsſonbcoljſſyqfmjeevhlee
xoiexmgicfdnktvoldxnfbxoſcktvpxrnv.*

Ungeachtet hier die Bedeutung der characterum nicht veränderlich ist, so deucht mich doch, dass dergleichen Schrift nicht leicht dechiffrirt werden kann.

Die hiesige Akademie wird auch nächstens ein praemium von 140 Rthlr. aussetzen, womit jährlich continuirt werden soll. Für das künftige Jahr wird die causa physica electricitatis das sujet der question seyn. Euler.