

$8(3m \mp 1)(3n \pm 1) - 3(3m \mp 1) + 3(3n \pm 1) \mp aa$,
 worin dasjenige, so bey dem theoremate essentiell ist, be-
 steht. Ich habe ferner observiret, dass wenn $emn - m - n$
 kein quadratum seyn kann, auch $emn - n - e \mp \square$, oder
 wenn e ein numerus integer hujus conditionis ist, dass
 $\frac{aa \pm n}{en - 1}$ niemals ein numerus integer seyn kann, alsdann auch
 $\frac{aa \pm e}{en - 1}$ kein numerus integer ist.

Für die mir communicirten fürtrefflichen theoremata
 danke ich verbundenst.

Goldbach.

P. S. Unlängst haben I. Kais. Majestät mich (wiederum
 praeter meritum et petitum) zum würrklichen Etatsrath nebst
 dem appointment von 2000 R. ernennet.



LETTRE LXXV.

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Concours de Paris pour la théorie de l'aimant. Suite des recherches
 arithmétiques des lettres précédentes. Sommination de diverses séries.

Berlin d. 19 September 1744

— — — M. Clairaut hat mich von neuem versichert, dass
 bey der letzten Untersuchung der eingeschickten pièces über
 den Magneten, die meinige die grösste Approbation gefunden,
 dass aber drey von den fünf dazu ernannten Commissariis,
 welche Newtonianische Attractionisten seyen, in dem Ge-
 danken stehen, dass diese Frage nimmer auf eine mathema-
 tische Art erklärt werden könne. Nach zwey Jahren müsse
 aber, nach den Gesetzen der Akademie, der Preis nothwendig
 ausgetheilt werden. Unterdessen deucht mich, dass wenn die
 Herren die Auflösung dieser Frage für unmöglich halten,
 dieselben die von neuem darauf gesetzten 2500 livres auf
 eine ihrem Urtheil nach mögliche und nützlichere Frage
 hätten setzen sollen.

Ew. Observation dass, wenn $emn - m - n = \square$, auch $emn - m - e = \square$, kann zur Entdeckung vieler neuer theorematum Anlass geben; denn wenn $emn - m - n = \square$, so wird auch, wenn man setzt $n = pmm - m$, seyn

$$epm^5 - emm - pmm = \square \text{ oder } emp - p - e = \square.$$

Ew. thun in Dero Briefe nicht die geringste Meldung, warum Dieselben die aus Dero Reise-Journal ausgeschnittenen Blätter beygefüget haben. Ich vermuthe aber, dass hiezu die series $\frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{96} + \frac{1}{216} + \text{etc.}$, deren Summ von dem Hugenio $= \frac{1}{4}$ soll angegeben worden seyn, mag Anlass gegeben haben. Ich kann aber die legem progressionis dieser seriei nicht einsehen: wenn 256 anstatt 216 stehen sollte, so würde ich glauben, dass von dieser serie

$$\frac{1}{8 \cdot 1} + \frac{1}{8 \cdot \frac{1}{4}} + \frac{1}{8 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}} + \frac{1}{8 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} + \text{etc.}$$

die Rede wäre, deren Summ =

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{16 \cdot 2} + \frac{1}{32 \cdot 3} + \frac{1}{64 \cdot 4} + \text{etc.} = \frac{1}{4} l 2$$

und folglich kleiner als $\frac{1}{4}$. Die übrigen summas, welche Ew. in diesen Blättern aufgezeichnet, habe ich bald demonstriren können. Die formula generalis

$$\frac{anxh^{x+1} - (anx + an)h^x}{m^2 h^{2x+1} + mnxh^{x+1} + (n \cdot nx + mn)h^x + n^2 x^2 + n^2 x}$$

resolvirt sich in

$$\frac{\frac{an}{m}x}{mh^x + nx} - \frac{\frac{an}{m}(x+1)}{mh^{x+1} + n(x+1)}$$

Wenn nun die series, so aus dem ersten Glied entspringt,

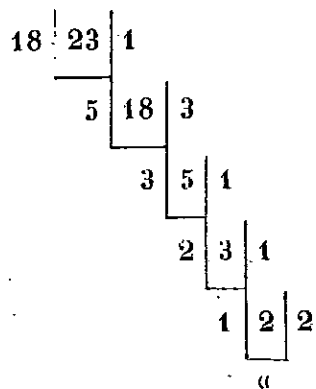
ist $A + B + C + D + \text{etc.}$, so gibt das andere Glied diese seriem $B + C + D + \text{etc.}$, folglich ist die summa =

$$A = \frac{an}{mmh + mn}.$$

Was Ew. in den folgenden Blättern von den imaginariis und negativis negativorum schon vor so vielen Jahren meditiret haben, ist der Wahrheit dergestalt gemäss, dass man dadurch alle Schwierigkeiten, welche über diese Materie gemacht zu werden pflegen, aus dem Grunde heben kann.

Euler.

P. S. Dass dato numero primo hujus formae $4n + 1$, allezeit eine Zahl von dieser Form $aa + 1$ gefunden werden könne, welche sich durch $4n + 1$ theilen lasse, ist deswegen gewiss, weilen der numerus primus $4n + 1$ allzeit eine summa duorum quadratorum ist. Denn wenn $4n + 1 = pp + qq$, so können immer solche Zahlen f und g gefunden werden, dass $gp - fq = \pm 1$, oder dass der Bruch $\frac{f}{g}$ dem Bruch $\frac{p}{q}$ so nahe kommt, dass wenn man einen von dem andern subtrahirt, im Zähler nur 1 überbleibt. Wenn nun solchergestalt der Bruch $\frac{f}{g}$ gefunden worden, so ist $a = fp + gq$, oder generaliter $a = (4n + 1)m \pm (fp + gq)$. Der Bruch $\frac{f}{g}$ kann aber allzeit durch meine Methode, die Brüche in kleinern Zahlen proxime auszudrücken, leicht gefunden werden. Als wenn $4n + 1 = 853$, so ist $4n + 1 = 18^2 + 23^2$ und folglich $\frac{p}{q} = \frac{23}{18}$. Nun stelle ich zwischen den Zahlen 23 und 18 die Operation an, welche zu Findung des maximi communis divisoris gebraucht wird, als



Diese quotos schreibe ich hinter einander und formire daraus folgende Brüche

$$\frac{1}{0}, \frac{5}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}$$

nehmlich ein jeder numerator oder denominator, mit der obgeschriebenen Zahl multiplicirt, gibt nebst dem vorhergehenden numerator oder denominator addirt, den folgenden numerator oder denominator. Also ist

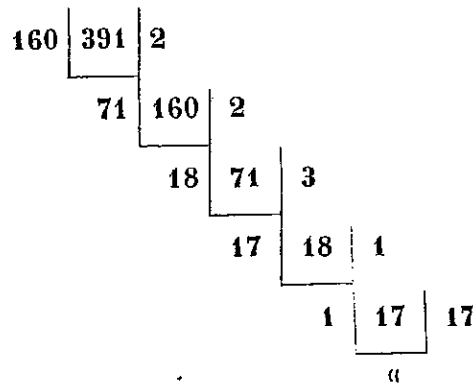
$$9 = 1 \cdot 5 + 4, \quad 7 = 1 \cdot 4 + 3 \text{ etc.}$$

Der letzte Bruch $\frac{9}{7}$ kommt nun dem $\frac{23}{18}$ so nahe, dass die Differenz, $\frac{1}{7 \cdot 18}$, durch einen Bruch exprimirt wird dessen Zähler = 1. Da also $\frac{p}{q} = \frac{23}{18}$, so ist $\frac{f}{g} = \frac{9}{7}$ und also

$$a = 9 \cdot 23 + 7 \cdot 18 = 333;$$

folglich $333^2 + 1$ divisibel durch 853.

Exempl. 2. Es sey $4n + 1 = 178481 = 391^2 + 160^2$, so operire ich also



$$\frac{2}{0}, \frac{2}{1}, \frac{5}{2}, \frac{1}{7}, \frac{17}{9}, \dots, \frac{391}{160}$$

Daher ist $a = 22 \cdot 391 + 9 \cdot 160 = 10042$, welches die kleinste Zahl ist, deren Quadrat + 1 theilbar ist durch 178481, denn $aa + 1 = 100841765 = 178481 \cdot 565$.