Als mir neulich ein Theil von den Mémoires de l'Académie p. l'année 1734 in 8° in die Hände gerathen, habe ich daselbst p. 268 s. des Hn. Clairaut solution de plusieurs problèmes etc. angetroffen. Die Solution, so er gibt, kann meines Erachtens nicht generalior erdacht werden, und was er von dem problème troisième sagt, scheinet mir auch sehr merkwürdig. Der Hr. Bouguer brauchet, vor das signum, so Ew. schreiben $\nless$, dieses $\geqq$, welches zwar nicht compendiös, aber sehr expressif ist.

Goldbach.

LETTRE LXXVII.

=

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE Même sujet.

Berlin d. 17. November 1744.

— — — Dass Ew. meine Methode die numeros $aa+1$ zu finden, so durch den numerum primum $4N+1$ theilbar sind, einiger Attention gewürdiget, erfreuet mich sehr: Der Beweis davon ist dieser: Wenn $aa+bb$ divisores haben soll, so müssen die Buchstaben a und b also beschaffen seyn $a=mp+nq$ und $b=mq-np$; denn da wird $aa+bb=(mm+nn)(pp+qq)$, und folglich ist $aa+bb$ divisibel durch $pp+qq$. Da nun $4N+1$ immer auf die Form $pp+qq$ gebracht werden kann, so müssen solche Zahlen für m und n gefunden werden, damit $b=$ wird ± 1, oder $mq-np=\pm 1$. Wenn ich also aus der Aequalität $4N+1=pp+qq$ den Bruch $\frac{p}{q}$ formire, so muss ein anderer Bruch $\frac{m}{n}$ gesucht werden dergestalt, dass wenn diese Brüche $\frac{m}{n} \times \frac{p}{q}$ per crucem multiplicirt werden, die producta mq und np nur unitate differiren; oder der Bruch $\frac{m}{n}$ muss in minoribus numeris dem Bruch $\frac{p}{q}$ proxime gleich seyn. Wenn ich nun mit den Zahlen p und q die Operation anstelle, welche man um den maximum communem divisorem davon zu finden, zu machen pflegt, und aus den quotis auf vorher beschriebene Art fractiones formire, so ist der letzte Bruch $= \frac{p}{q}$; und da in einer solchen Reihe Brüche, zwey neben einander stehende immer so beschaffen sind, dass die producta ex multiplicatione per crucem orta nur um 1 von einander differiren, so kann die fractio penultima für $\frac{m}{n}$ angenommen werden, da dann herauskommt $a = mp + nq$.

So viel ich mich erinnere, so sind mir die in den jüngstens überschickten Briefen enthaltenen Begriffe von den numeris imaginariis sehr gründlich vorgekommen.

Wenn $emn + fm + gn = a + bx + cxx$, so würde auch $4cemn + 4cfm + 4cgn = 4ac + 4bcx + 4ccxx = 4ac - bb + (b + 2cx)^2$ und folglich würde $4cemn + 4cfm + 4cgn - 4ac + bb = \square$. Ob es nun möglich ist dergleichen Formuln zu finden? so kommt es darauf an, ob es solche Formuln gebe $emn \pm fm \pm gn \pm h$, welche immer ein Quadrat werden können. Ich habe aber auf dergleichen Formuln vorher nicht gedacht und darüber auch noch jetzt nichts entdecket, welches an Ew. überschrieben zu werden verdiente.

Was die Formul $emn - m - n$ betrifft, so habe ich sehr weit hinaus alle Zahlen für e gesucht, in welchen diese

Formul ein quadratum werden kann, und habe gefunden, dass für e alle Zahlen gesetzt werden können, ausser diesen: 4, 7, 8, 12, 15, 16, 20, 23, 24, 28, 31, 32, 36, 39, 40, 44, 47, 48, 52, 55, 56, 60, 63, 64, 68, 71, 72, — so weit bin ich mit meiner Untersuchung gekommen. Da nun in diesen Zahlen keine andere, als welche in diesen beyden formulis $4k$ und $8k - 1$ enthalten sind, vorkommen, so däucht mich die Induction richtig zu seyn, wenn ich sage, dass sowohl diese Formul $4kmn - m - n$ als diese

$$(8k - 1)mn - m - n$$

kein Quadrat werden könne. Ich habe noch, nicht nur keine von diesen beyden formulis falsch befunden, sondern wenn auch für e irgend eine andere Zahl ausser $4k$ und $8k - 1$ angenommen wird, so habe ich noch immer die Formul $emn - m - n$ auf ein Quadrat bringen können.

Auf Ew. Veranlassung habe ich des Hn. Clairaut pièce in den Mémoires A. 1734 nachgelesen. Die Solution der beyden erstern ist die Newtonianische, und kann freylich nicht allgemein seyn. Das dritte problema ist in der That sehr merkwürdig. Die Solution ist aber so beschaffen, dass dieselbe auf keinen andern, als einen rechten Winkel applicirt werden kann, da doch der casus, wenn der angulus nicht rectus ist, eben so möglich ist. Ich habe mit dem Hn. Clairaut viel darüber correspondirt, wir haben aber beyde diesen letztern casum nicht ins Reine bringen können.

Euler.