# LETTRE LXXVIII.

═

## Goldbach à Euler.

Sommaire. Même sujet.

---

St. Petersburg d. 26. Januar 1745.

Aus Ew. letzterm Schreiben habe ich ersehen, dass Sie zu der aequatione $emn - m - n$ keine andere valores vor $e$, als die entweder multipli quaternarii, oder $= 8k - 1$ sind, gefunden haben; weil Sie sich aber hierin blos auf eine Induction beziehen, so habe hiebey anmerken wollen, dass, wenigstens ausser diesen beyden casibus, die propositio $emn - m - n = aa$ allezeit falsch ist und die quadrata, denen $emn - m - n$ gleich wird, sogar angegeben werden können, so oft entweder $e$ oder $e - 1$ ein divisor von einem quadrato unitate aucto seyn kann. Denn in casu primo, ubi $be = cc + 1$, fiat $n = b + 1$, $m = b + bb$, erit



$$emn - m - n = eb(b+1)^2 - b(b+1) - (b+1) = (eb-1)(b+1)^2 = cc(b+1)^2;$$

in casu secundo, wenn $e - 1$ ein divisor ist von $aa + 1$, ponatur $m = 1$, $n = \frac{aa+1}{e-1}$. Igitur nullae aliae sunt formulae possibiles pro $e$ in propositione $emn - m - n = aa$, nisi cum $e$ est vel quaternarius (aut ejus multiplus quicunque), vel cum $e$ est $= 8k - 1$; utrovis enim casu tam $e$ quam $e - 1$ nullo modo dividere possunt quadratum unitate auctum; hinc fit, ut quamvis $4k - 1$ non possit dividere quadratum unitate auctum, tamen ad exprimendum valorem $e$ in propositione $emn - m - n = aa$ ineptum sit, propterea quod $e - 1 = 4k - 2$ potest esse divisor quadrati unitate aucti, ex quibus sequitur praeter numeros in formulis $4k$ et $8k - 1$ comprehensos, alios nullos posse substitui pro $e$, quoniam scilicet nulli alii hac gaudent proprietate, ut tam $e$, quam $e - 1$ dividere nequeat quadratum unitate auctum, etsi non demonstratum sit omnes numeros hujus formae $8k - 1$ pro $e$ positos satisfacere, quod tamen verisimillimum arbitror, nec dubito quin aliqua ratione, quae mihi nunc non suppetit, demonstrari possit.

Auf meiner Rückreise von Moscau hieher ist mir eingefallen, dass vielleicht die propositio de numeris primis hujus formae $4n + 1$, qui sunt summae duorum quadratorum, nur ein corollarium hujus theorematis seyn möchte: Omnes numeri hujus formae $4n + 1$, qui dividi nequeunt per numerum hujus formae $4m \div 1$, tot modis sunt summae duorum quadratorum, quot modis dispesci possunt in duos factores, ex. gr. 65 est numerus hujus formae $4n + 1$, nec dividi potest per numerum ullum formae $4m - 1$, ergo 65 tot modis est summa duor. quadr. quot modis dispesci potest in duos factores, nempe duobus modis (1) 1.65, (2) 5.13, est igitur aggregatum duor. quadr. (1) $1+64$, (2) $16+49$.

Similiter 25 est numerus hujus formae $4n+1$ nec dividi potest per numerum hujus formae $4m-1$, igitur cum dupliciter resolvi possit in duos factores, nempe (1) in 1 et 25, (2) in 5 et 5, erit dupliciter summa duorum quadratorum (1) $0+25$, (2) $9+16$.

Similiter numerus 625 ejusdem naturae tripliciter resolvitur in duos factores (1) 1.625, (2) 5.125, (3) 25.25, ergo tripliciter est summa duor. quadr. (1) $0^2+25^2$, (2) $7^2+24^2$, (3) $15^2+20^2$.

Numerus 493 ejusdem naturae duobus modis resolvi potest in duos factores (1) 1.493, (2) 17.29, ergo duobus modis est summa duor. quadr. (1) $3^2+22^2$, (2) $13^2+18^2$ etc.

Uebrigens habe ich zwey Methoden, wenn die aequatio $emq-q-m=aa$ in einem casu $q$ possibilis ist, innumeros alios casus pro aequatione $emn-m-n=bb$ zu finden, nämlich si fiat

$$\text{I. } q-2ak+(em-1)kk=n,$$

$$\text{II. } ((em-1)h+1)^2q-hm((em-1)h+2)=n$$

ubi $h$ et $k$ sint numeri quicunque, modo $n$ fiat integer, deren Wahrheit per ipsam substitutionem alsofort demonstriret wird.

Goldbach.



# LETTRE LXXIX.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Suite des recherches arithmétiques. Problème de la courbe catoptrique. Equation différentielle à intégrer.

Berlin d. 16 Februar 1745.

——Dass diese Formul $emn-m-n$ nimmer ein Quadrat seyn könne, wenn $e$ entweder eine solche Zahl $4k$, oder eine solche $8k-1$ ist, habe ich nur aus einer Induction geschlossen. Diese Observation erhält aber durch Ew. Entdeckung einen weit grössern Grad der Gewissheit. Denn dadurch wird unwidersprechlich dargethan, dass so oft entweder $e$ oder $e-1$ ein divisor ist von $cc+1$, für $m$ et $n$ allezeit solche Zahlen gefunden werden können, dass $emn-m-n$ ein Quadrat wird. Weil nun weder $4k$ noch $8k-1$ immer hierin Platz finden können, so kann auf diese Art weder für $e=4k$, noch für $e=8k-1$ die Formul $emn-m-n$ zu einem Quadrat gebracht werden. Um