ope normalis CN bekannt wird, folglich posita $AD = u$, u per x et y data ist, so muss auch positis $AF = x'$, $FE = y'$, die inter radios AE et ED intercepta eadem pars axis AD per x' et y' gegeben seyn, durch welche Aequation y' eliminirt wird.

3. Fiat $\dfrac{CB}{y} : \dfrac{BD}{u-x} :: \dfrac{DF}{x'-u} : \dfrac{EF = y'}{\frac{(u-x)(x'-u)}{y}}$, wodurch x' eliminirt wird. Wenn endlich auch

4. die summa radiorum incidentis et reflexi usque ad axem entweder constans (wie in der ellipsi), oder certae cuidam functioni ipsius x gleich gesetzt wird, so kann dadurch auch y per x determiniret werden, wiewohl ich dieses alles jetzo nicht gnugsam einsehe und Ew. besseren Beurtheilung überlasse.

Goldbach.

LETTRE LXXXI.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Mêmes sujets.

Berlin d. 19 Juni 1745.

— — Da ein jegliches integrale, wenn es vollständig seyn soll, eine neue quantitatem constantem in sich enthalten muss, welche in dem differentiali nicht gewesen, so ist die formula $y = -xx + \beta x + \gamma$ nicht das vollständige integrale der Aequation

$$ay\,dy + y(3ax + b)\,dx + (ax^3 + bx^2 + cx + f)\,dx = 0.$$

Solches kann aber aus dem integrali particulari leicht gefunden werden, wenn man setzt $y = z - xx + \beta x + \gamma$.

Was das andere problema anlangt, welches jetzt in den Actis Lipsiensibus herauskommt, da die radii ex puncto dato emanantes post duplicem reflexionem in eben dasselbe Punct zurückkommen sollen, so hat das tentamen Ew. seine volle

Richtigkeit, und dienet, um die curvam infra axem constitutam zu finden, wenn die obere als bekannt angenommen wird. Die grösste Schwierigkeit aber beruhet darauf, dass beyde curvae eandem curvam continuam ausmachen, welcher Umstand von Ew. nicht in Betrachtung gezogen worden. Ich habe anfänglich die Solution auch auf eben diese Art tentirt, die formulae werden aber allzu weitläufig und verwirrt, als dass ich dieser letzten Bedingung hätte ein Genüge leisten können. Ich glaubte, dass die Annehmung einer Axe daran schuldig wäre, indem man wenig hinreichenden Grund hat, warum man vielmehr diese, als eine andere Linie für die Axe annehmen sollte. Daher habe ich diese Betrachtung völlig beiseit gesetzt und meine Solution folgendergestalt vorgenommen:

Lemma. Si (Fig. 12) ex foco C in curvam AM radii CM incidant, atque ex C in tangentem MP demittatur perpendiculum CP: vocatis $CM=y$; $CP=p$, erit longitudo radii reflexi $MO=\frac{pydy}{2ydp-pdy}$.

Problema. Circa datum punctum C describere curvam $AMmB$, ut radii ex C egressi post duplicem reflexionem in M et m in idem punctum C revertantur.

Solutio. Ad M et m ducantur tangentes MP, mp in easque ex C demittantur perpendicula CP, Cp. Vocentur $CM=y$, $CP=p$, $MP=q=\sqrt{(yy-pp)}$, item $Cm=Y$, $Cp=P$, $mp=-Q=-\sqrt{(YY-PP)}$. Sit MO radius reflexus, incidenti CM respondens, et mO radius reflexus, incidenti Cm respondens, erit per lemma: $MO=\frac{pydy}{2ydp-pdy}$ et $mO=\frac{PYdY}{2YdP-PdY}$ et $Mm=\frac{pydy}{2ydp-pdy}+\frac{PYdY}{2YdP-PdY}$. Bisecentur anguli CMm, CmM rectis ML, ml, quae erunt

normales ad curvam, ac propterea perpendiculis CP, Cp parallelae. Jam cum anguli MCP vel CML sit sinus $=\frac{q}{y}$, et cosinus $=\frac{p}{y}$, erit anguli dupli CMm sinus $=\frac{2pq}{yy}$, cosinus $=\frac{pp-qq}{yy}=\frac{2pp-yy}{yy}$, et anguli CmM sinus $=-\frac{2PQ}{YY}$ et cosinus $=\frac{PP-QQ}{YY}=\frac{2PP-YY}{YY}$. Ergo perpendiculum $CN=\frac{2pq}{y}=-\frac{2PQ}{Y}$ et $MN=\frac{2pp}{y}-y$ atque $mN=\frac{2PP}{Y}-Y$. Unde nascuntur hae duae aequationes:

I. $\frac{pq}{y}+\frac{PQ}{Y}=0$ et II. $\frac{2pp}{y}-y+\frac{2PP}{Y}-Y=\frac{pydy}{2ydp-pdy}+\frac{PYdY}{2YdP-PdY}$ seu $\frac{pp}{y}+\frac{PP}{Y}=\frac{yydp}{2ydp-pdy}+\frac{YYdP}{2YdP-PdY}$.

Ad has aequationes simpliciores reddendas ex P et p in CM et Cm demittantur perpendicula PR et pr, et vocentur $CR=r$, $PR=s$, $Cr=R$ et $pr=-S$ quia in plagam oppositam vergit, eritque $r=\frac{pp}{y}$, $s=\frac{pq}{y}$, et ob $y=\frac{pp}{r}$ et $dy=\frac{2pdp}{r}-\frac{ppdr}{rr}$ erit $2ydp-pdy=\frac{p^3dr}{rr}$ ideoque $\frac{yydp}{2ydp-pdy}=\frac{pdp}{dr}=r+\frac{sds}{dr}$ ob $pp=rr+ss$. Simili modo erit $R=\frac{PP}{Y}$, $S=\frac{PQ}{Y}$, $\frac{YYdP}{2YdP-PdY}=\frac{PdP}{dR}=R+\frac{SdS}{dR}$. Quibus valoribus substitutis binae aequationes solutionem continentes abeunt in has: I. $s+S=0$,

II. $r+R=r+\frac{sds}{dr}+R+\frac{SdS}{dR}$, seu II. $\frac{sds}{dr}+\frac{SdS}{dR}=0$.

Quodsi jam ponatur $s=t$ et $\frac{sds}{dr}=u$, erit $S=-t$ et $\frac{SdS}{dR}=-u$; quare, cum puncta M et m ad eandem curvam pertinere debeant, eandem relationem inter t et u atque inter $-t$ et $-u$ esse oportet; et quia s exprimitur per radicale $\sqrt{(pp-rr)}$, necesse est ut aequatio inter t et u ita sit comparata, ut non mutetur sive t et u capiantur negative sive affirmative. Si itaque pro relatione inter t und u assumatur hujusmodi aequatio $\alpha tt + \beta uu = aa$, seu $aa = \alpha tt + \beta uu + \gamma t^4 + \delta t^2 u^2 + \varepsilon u^4$ etc. semper prodibit curva quaesito satisfaciens. Assumta autem hujusmodi idonea aequatione inter t et u, erit $s = t$ et $\frac{sds}{dr} = \frac{tdt}{dr} = u$, unde fit $r = \int \frac{tdt}{u}$, $p = \sqrt{(rr + ss)}$ et $y = r + \frac{ss}{r}$. Sicque obtinetur relatio inter quemvis radium CM et respondens perpendiculum in tangentem CP, ex qua relatione curva construi potest.

Si pro aequatione inter t et u assumatur $tt + uu = aa$, erit $udu = -tdt$ et $r = b - u$, existente $s = t = \sqrt{(aa - uu)}$, unde $p = \sqrt{(aa + bb - 2bu)}$ et $y = \frac{pp}{r} = \frac{aa + bb - 2bu}{b - u}$, seu ob $u = \frac{aa + bb - pp}{2b}$, erit $r = \frac{bb - aa + pp}{2b}$ et $y = \frac{2bpp}{bb - aa + pp}$ seu $pp = \frac{(bb - aa)y}{2b - y}$, quae aequatio praebet omnes ellipses, alterum focum in C habentes. Sumtis igitur aliis aequationibus inter t et u, supra descriptam indolem habentes, infinitae aliae curvae satisfacientes prodibunt, inter quas quoque curvae algebraicae reperientur, wie ich denn unter andern auch eine ordinis sexti gefunden habe.

Euler.

LETTRE LXXXII.

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Considérations ultérieures sur la courbe catoptrique.

St. Petersburg d. .. Julii 1745.

Ich weiss nicht eigentlich, ob mir bey Abgang meines letztern Schreibens schon bekannt gewesen, dass Ew. das Directorium der mathematischen Classe in der Königl Akademie der Wissenschaften erhalten, in welchem Fall ich Deroselben (dieses relativum gehet sowohl auf Ew. als auf die Akademie selbst) schon damals, wie ich es jetzo thue, dazu hätte gratuliren sollen. Das Absterben Dero Hn. Vaters habe zu allererst aus dem letzten Briefe vernommen, und wie den Verlust, so Sie hiedurch erlitten, von Herzen bedaure, so wünsche hingegen, dass Ew. ein gleiches Alter bey guter Gesundheit und allem Vergnügen erreichen mögen.

Für die mir communicirte Solution danke ich dienstlich. Ich zweifle nicht, dass dieselbe so kurz sey, als nur mög-