lich; allein sie erfordert doch eine besondere Application, um alles recht einzusehen. Ohngeachtet nun zur Solution die consideratio unius puncti $C$ (Fig. 13), aus welchem die radii ausgehen und wohin sie post duplicem reflexionem zurückkehren, gnugsam ist, so halte ich doch davor, dass ausser diesem, noch ein anderes punctum in allen dergleichen curvis, in eadem a centro distantia zugegen seyn muss, welches eben dieselbe Proprietät als das punctum $C$ haben wird; dahero, wenn das problema folgendergestalt concipirt würde: Datis diametris curvae $AB$ et $DE$, invenire in axe $AB$ punctum $C$, ex quo omnes radii etc., so möchte ich gern sehen, wie dergleichen curva non-ellipsis von einer ellipsi differiren würde, denn ich zweifle sehr, ob eine curva, deren vier quadrantes nicht similes et aequales sind (wie in der ellipsi) zur Solution geschickt seyn könne. Ist aber die curva solchergestalt beschaffen, so kann man die Probe, ob eine aequatio data satisfaciret, auch folgendermaassen, nach Ew. Anleitung anstellen: Sit radius quicunque ex puncto $C$ in curvam incidens $CD = y$, radius a curva reflexus (in axem) $DF = y'$, radius ab axe reflexus (ita ut ang. $CFD =$ ang. $BFG$) $FG = y''$, radius a curva reflexus $GC = y'''$. Requiritur ut spatium in axe interceptum $CF$ inter $y$ et $y'$, item inter $y''$ et $y'''$ sit idem.

Goldbach.



# LETTRE LXXXIII.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Recherches sur les séries. *P. S.* Courbe catoptrique.

Berlin d. 7 August 1845.

— — Ich habe seit einiger Zeit mit dem Hn. Prof. Nicolao Bernoulli zu Basel eine kleine Dispute über die series divergentes, dergleichen diese ist

$$1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 + 720 - \text{etc.}$$

gehabt, indem derselbe geläugnet, dass alle dergleichen series eine determinirte Summ haben, ich aber das Gegentheil behauptet, weilen ich glaube, dass eine jegliche series einen bestimmten Werth haben müsse. Um aber allen Schwierigkeiten, welche dagegen gemacht worden, zu begegnen, so sollte dieser Werth nicht mit dem Namen der Summ beleget werden, weil man mit diesem Wort gemeiniglich einen solchen Begriff zu verknüpfen pflegt, als wenn die

Summ durch eine würkliche Summirung herausgebracht würde: welche Idee bei den seriebus divergentibus nicht Statt findet. Da nun eine jegliche series aus der Evolution einer expressionis finitae entstehet, so habe ich diese neue Definition von der Summ einer jeglichen seriei gegeben:

Summa cujusque seriei est valor expressionis illius finitae, ex cujus evolutione illa series oritur.

Der Herr Bernoulli hat diese Definition vollkommen approbirt, zweifelt aber noch, ob nicht öfters eben dieselbe series divergens aus verschiedener expressionum finitarum evolutione entstehen könne, also dass man nach dieser Definition verschiedene Werthe zugeben müsste. Darüber hat er zwar kein Exempel gegeben, ich glaube aber gewiss zu seyn, dass nimmer eben dieselbe series aus der Evolution zweyer wirklich verschiedener expressionum finitarum entstehen könne. Und hieraus folget dann unstreitig, dass eine jegliche series, sowohl divergens als convergens, einen determinirten Werth oder summam haben müsse. Dahero, wenn die Summ dieser seriei $1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 +$ etc. gefunden werden soll, so muss man den valorem derjenigen Formul anzeigen, aus deren Evolution diese series entstehet. Um diese zu finden, so stelle man sich eine krumme Linie vor, deren abscissa $= x$ und applicata $= y = \frac{1}{1 - lx}$. Da nun $l0 = -\infty$ und $l1 = 0$, so wird diese curva eine solche Form haben (Fig. 14), und die area derselben $APM = \int y\,dx = \int \frac{dx}{1 - lx}$ wird $= xy - 1xy^2 + 2xy^3 - 6xy^4 + 24xy^5 -$ etc. Setzt man nun $AP = x = 1$, so wird auch $y = 1$, und die area $APM$ wird seyn $1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 +$ etc. dahero der Werth dieser seriei der areae $APM$ gleich seyn muss, welche nicht nur determinirt, sondern auch, wie aus der



Figur erhellet, etwas grösser ist als $\frac{1}{2}$. Einen solchen Werth habe ich auch durch verschiedene Methoden, wodurch ich dieselbe series in convergentes verwandelt habe, herausgebracht. Anjetzo aber kann ich beweisen, dass diese series gleich sey dieser Expression

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{3}{1+\cfrac{3}{1+\cfrac{4}{1+\cfrac{4}{1+\cfrac{5}{1+\cfrac{5}{1+\text{etc.}}}}}}}}}}}$$

welche nicht nur stark convergirt, sondern auch limites continuo propiores angibt, intra quos valor contineatur. Denn wenn die summa seriei $1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 +$ etc. gesetzt wird $= s$, so ist $s < 1$; $s > \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$;

$$s < \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+1}} = \frac{2}{3};\quad s > \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+2}}} = \frac{4}{7} \text{ etc.}$$

Hieraus habe ich nun gefunden, dass proxime sey

$$s = 0{,}5963475922.$$

Es wäre also zu untersuchen ob dieser Werth nicht etwa durch die quadraturam circuli oder logarithmos angegeben werden könnte. Auf gleiche Weise kann ich auch diese seriem generalem

$s = 1 - ma + m(m+n)a^2 - m(m+n)(m+2n)a^3 + \text{etc.}$ summiren, denn es ist

$$s = \cfrac{1}{1 + \cfrac{ma}{1 + \cfrac{na}{1 + \cfrac{(m+n)a}{1 + \cfrac{2na}{1 + \cfrac{(m+2n)a}{1 + \cfrac{3na}{1 + \cfrac{(m+3n)a}{1 + \cfrac{4na}{1 + \text{etc.}}}}}}}}}}$$

also ist $s < 1$; $s > \frac{1}{1+ma}$; $s < \frac{1+na}{1+(m+n)a}$;

$$s > \frac{1+(m+2n)a}{1+2(m+n)a+m(m+n)a^2} \text{ etc.}$$

Euler.

*P. S.* Meine vormals überschriebene Solution des problematis catoptrici habe seit der Zeit kürzer zusammengezogen und zum Gebrauch dergestalt eingerichtet, dass alle satisfacirende krumme Linien nicht nur leicht erkannt, sondern auch alle, welche algebraische sind, leicht angezeigt werden können. Ew. haben ganz Recht, dass alle diese Linien einen diameter nothwendig haben müssen, als $AB$ (Fig. 15); es folget aber nicht, dass ausser diesen noch eine andere Linie, als $EE$ die curvam in duas partes similes et aequales schneide. Um alle mögliche curvas zu finden und durch Generalformuln auszudrücken, so nehme man für $v$ eine solche Function von $u$, welche verwandelt werde in $-v$, wenn für $u$ gesetzt wird $-u$. Dergleichen Functionen sind $u$, $u^3$, $u^5$, $u^7$, $\frac{1}{u}$, $\frac{1}{u^3}$ etc. und so daraus zusammengesetzt werden, als $\alpha u + \beta u^3 + \frac{\gamma}{u} + \frac{\delta}{u^3}$ etc. Wenn nun für $v$ eine solche functio ipsius $u$ angenommen worden, so suche man $p = \frac{dv}{du}$, und daraus wird die curva folgendergestalt bestimmt werden. Man nehme die abscissam



$$CP = x = \frac{up^2(cc-uu)}{c(a+v)} - \frac{2p(cc-uu)}{c} - \frac{u(a+v)}{c},$$

so wird die applicata

$$PM = y = \pm\left(\frac{pp(cc-uu)}{c(a+v)} + \frac{2up}{c} - \frac{a-v}{c}\right)\sqrt{(cc-uu)}.$$

Setzt man nun $v = u$, so kommt die ellipsis heraus, deren focus in $C$. Denn da $v = u$, so wird $p = \frac{dv}{du} = 1$ und $x = -\frac{(aa+cc)u-2acc}{c(a+u)}$ und $y = \frac{(cc-aa)\sqrt{(cc-uu)}}{c(a+u)}$. Wenn man nun $u$ eliminirt, so bekommt man

$$aa(xx+yy) = (aa-cc-cx)^2.$$

Setzt man aber $v = \frac{cc}{u}$ und $c = a$, so wird $p = \frac{dv}{du} = -\frac{cc}{uu}$ und folglich

$$x = \frac{3a^3 - a^2u - 3auu - u^3}{uu}$$

und

$$y = \frac{a^3 - a^2u - 3auu - u^3}{u^3}\sqrt{(aa-uu)},$$

woraus sich die Figur der krummen Linie leicht bestimmen lässt. Wollte man aber $u$ eliminiren und eine Aequation zwischen $x$ und $y$ suchen, so würde dieselbe, wofern sich nichts destruirt, auf 12 Dimensionen steigen.

Uebrigens ist bey den vorgegebenen Generalformuln zu merken, dass daraus die Länge des radii

$$CM = \frac{pp(cc-uu)}{a+v} + a + v,$$

wodurch die Construction nicht wenig erleichtert wird. Wenn ferner auf diese Art das punctum primae reflexionis $M$ bestimmt wird, so darf man nur, um das punctum alterius reflexionis $N$ zu finden, setzen $u = -u$, da denn $v$ in $-v$ verwandelt wird, $p$ aber den vorigen Werth behält. Es wird nehmlich: $CQ = -\frac{upp(cc-uu)}{c(a-v)} - \frac{2p(cc-uu)}{c} + \frac{u(a-v)}{c}$ und

$$QN = \pm\left(\frac{pp(cc-uu)}{c(a-v)} - \frac{2up}{c} - \frac{a+v}{c}\right)\sqrt{(cc-uu)};$$

$$CN = \frac{pp(cc-uu)}{a-v} + a - v.$$



# LETTRE LXXXIV.

## Goldbach à Euler.

Sommaire. Mêmes sujets. Réponse à la précédente. Méthode de transformer toutes sortes de séries divergentes en convergentes.

*Sans date* (St. Petersburg d. 25. Sept. 1745.)

Wenn ich (Fig. 16) das spatium, quod inter radium incidentem et reflexum in diametro intercipitur, $CR$, nach Ew. formulis exprimire, so wird selbiges in der ellipsi constans seyn, in den andern curvis aber jederzeit solche limites haben, dass wenn $CO$ die abscissa respondens applicatae maximae $OE$ ist, das spatium interceptum $CR = 2CO$ zwischen diesen limitibus begriffen sey. Es lässet sich zwar dieses spatium interceptum durch die Aequation

$$CR = \frac{CP.NQ + MP.CQ}{MP + NQ}$$

generaliter leicht bestimmen, aber in der Application auf Ew. formulas scheinet sie mir etwas weitläufig zu werden.