LETTRE LXXXV.

═

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Tables astronomiques pour le soleil et la lune. Réponse à la lettre précédente.

Berlin d. 23. October 1745.

Ew. hatten vergessen in Dero letztem Schreiben das Datum beyzusetzen, daher ich eigentlich nicht weiss, wie lang ich dasselbe unbeantwortet gelassen, denn da ich anjetzo endlich neue tabulas astronomicas pro Sole et Luna zu Stande gebracht, so habe ich seit einiger Zeit so viel mit Rechnungen zu thun gehabt, dass ich an kein Briefschreiben gedenken konnte. Nunmehro bin ich zwar fertig, allein wenn ich der Herren Pariser Astronomen Gutachten und observationes darüber werde erhalten haben, so dürfte darin noch hin und wieder etwas zu ändern vorfallen.

Aus meinen formulis für die curvas, quae radios e foco emissos eodem reflectant, wird das spatium CR (Fig. 16)

sehr leicht und kurz ausgedrückt, ungeacht der calculus, um solches zu finden, wie Ew. angemerket haben, ziemlich weitläufig wird. Denn, wenn v eine solche Function von u andeutet, quae posito $-u$ loco $+u$ ipsa in sui negativam $-v$ abeat, so ist

$$CP = \frac{u(a+v)}{c} + \frac{2dv(cc-uu)}{cdu} - \frac{udv^2(cc-uu)}{cdu^2(a+v)};$$

$$PM = \left(\frac{dv^2(cc-uu)}{du^2(a+v)} + \frac{2udv}{du} - a - v\right)\frac{\sqrt{(cc-uu)}}{c}$$

und für das punctum N

$$CQ = -\frac{u(a-v)}{c} + \frac{2dv(cc-uu)}{cdu} + \frac{udv^2(cc-uu)}{cdu^2(a-v)};$$

$$QN = \left(\frac{dv^2(cc-uu)}{du^2(a-v)} - \frac{2udv}{du} - a + v\right)\frac{\sqrt{(cc-uu)}}{c}.$$

Wenn man nun diese expressiones in aequatione

$$CR = \frac{CP.NQ + MP.CQ}{MP + NQ}$$

substituirt, so findet man $CR = \frac{2cdv}{du}$, woraus erhellet, dass dieses spatium in keinem andern Fall constans sey, als wenn $v = \alpha u$, woraus die ellipsis entspringt. Wo aber die applicata maxima sey, lässt sich generaliter nicht bestimmen, noch zwischen dem Ort derselben und dem spatio CR ein Verhältniss entdecken.

Ew. höchst sinnreiche Methode alle series divergentes in convergentes zu verwandeln, indem Dieselben demonstrirt, dass, wenn

$$s = a + n(b-a) + \frac{n(n-1)}{1.2}(c-2b+a) + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(d-3c+3b-a) + \text{etc.},$$

so sey

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{a} + n\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right) + \frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{1}{c}-\frac{2}{b}+\frac{1}{a}\right) + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\left(\frac{1}{d}-\frac{3}{c}+\frac{3}{b}-\frac{1}{a}\right) + \text{etc.}$$

ist mir sehr wohl bekannt gewesen, und dieselbe weiset freylich ganz klar, dass keine series so divergens seyn könnte, deren summa nicht immer durch eine seriem convergentem ausgedrückt werden könne. Diejenigen aber, welche die divisionem praeposteram nicht zulassen wollen, werden hier ebenfalls Einwendungen machen, dass man supponire, man komme zuletzt auf differentias constantes oder evanescentes; allein alle dergleichen Einwürfe werden durch meine obgemeldte definitionem summae cujusque seriei leicht gehoben. Für die seriem $1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 +$ etc. findet man auch auf diese Art bald den valorem prope verum. Ich glaube aber, dass es sehr schwer seyn würde, auf diese Art den valorem summae nur auf $\frac{1}{1000}$ genau zu bestimmen; denn, ungeacht anfänglich die termini seriei conversae affirmativi werden, so kommen doch auch bald negativi zum Vorschein, und alsdann nehmen auch die termini nicht mehr merklich ab. Auf die von mir letzt überschriebene Art aber hat man die Approximation in seiner Gewalt und kann die Summ in Decimal-Fractionen so weit genau finden als man will.

Euler.

LETTRE LXXXVI.

Goldbach à Euler.

Sommaire. Courbe catoptrique. Spéculation sur les nombres π et $\sqrt{2}$. Nouvelle série.

St. Petersburg d. 9 Nov. 1745.

Aus dem spatio CR (Fig. 16), so Sie $= \frac{2cdv}{du}$ gefunden, lässt sich die applicata maxima ohne Schwierigkeit bestimmen, wenn man setzet $CP = \frac{CR}{2}$ und den valorem u, per a et c expressum, in der formula PM substituiret, wobey denn merkwürdig ist, dass die quantitas u, wenn das differentiale ipsius $PM = 0$ gesetzet wird, denselben valorem haben muss, den es ex aequatione $CP = \frac{CR}{2}$ bekömmt. Ingleichen, wenn man den radium MR suchen wollte, welcher perpendiculariter ad axem reflectiret wird, so müsste (weil alsdann die puncta P, Q et R in eines zusammenfallen) die quantitas u in diesen dreyen aequationibus $CP = CR$, $PM = QN$ und $CP =$