ist mir sehr wohl bekannt gewesen, und dieselbe weiset freylich ganz klar, dass keine series so divergens seyn könnte, deren summa nicht immer durch eine seriem convergentem ausgedrückt werden könne. Diejenigen aber, welche die divisionem praeposteram nicht zulassen wollen, werden hier ebenfalls Einwendungen machen, dass man supponire, man komme zuletzt auf differentias constantes oder evanescentes; allein alle dergleichen Einwürfe werden durch meine obgemeldte definitionem summae cujusque seriei leicht gehoben. Für die seriem $1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 +$ etc. findet man auch auf diese Art bald den valorem prope verum. Ich glaube aber, dass es sehr schwer seyn würde, auf diese Art den valorem summae nur auf $\frac{1}{1000}$ genau zu bestimmen; denn, ungeacht anfänglich die termini seriei conversae affirmativi werden, so kommen doch auch bald negativi zum Vorschein, und alsdann nehmen auch die termini nicht mehr merklich ab. Auf die von mir letzt überschriebene Art aber hat man die Approximation in seiner Gewalt und kann die Summ in Decimal-Fractionen so weit genau finden als man will.

Euler.

LETTRE LXXXVI.

Goldbach à Euler.

Sommaire. Courbe catoptrique. Spéculation sur les nombres π et $\sqrt{2}$. Nouvelle série.

St. Petersburg d. 9 Nov. 1745.

Aus dem spatio CR (Fig. 16), so Sie $= \frac{2cdv}{du}$ gefunden, lässt sich die applicata maxima ohne Schwierigkeit bestimmen, wenn man setzet $CP = \frac{CR}{2}$ und den valorem u, per a et c expressum, in der formula PM substituiret, wobey denn merkwürdig ist, dass die quantitas u, wenn das differentiale ipsius $PM = 0$ gesetzet wird, denselben valorem haben muss, den es ex aequatione $CP = \frac{CR}{2}$ bekömmt. Ingleichen, wenn man den radium MR suchen wollte, welcher perpendiculariter ad axem reflectiret wird, so müsste (weil alsdann die puncta P, Q et R in eines zusammenfallen) die quantitas u in diesen dreyen aequationibus $CP = CR$, $PM = QN$ und $CP =$

CQ einerley valorem haben. In dem casu, wo $v = u^3$, finde ich aus der aequatione $PM = \frac{CR}{2}$, $2u^3 - 3ccu - a = 0$, und in demselben casu, wenn $v = u^3$, finde ich, pro radio perpendiculariter ad axem reflexo, aus der aequatione $CP = CR$, $u = \left(\frac{a+3c}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$, welcher valor von u dann auch aus den andern beyden aequationibus $PM = QN$ und $CP = CQ$ herauskommen muss; so ich aber lieber glauben, als mich durch die Erfahrung davon convinciren will. Ich werde auch von diesem genere curvarum einen bessern Begriff bekommen, wenn Ew. mir melden wollen, durch was für Linien die quantitates constantes a et c item die variabilis u, seorsim consideratae, in der curva exprimiret werden; indessen kann ich beweisen, dass die curva in allen Fällen contradictoria wird, wo v eine solche functionem ipsius u andeutet, dass $\frac{dv}{a+v}$ grösser wird, als $\frac{du}{c+u}$.

Weil kein Zweifel ist, dass in dem numero $\frac{31415\ldots}{10000\ldots}$, so die circumferentiam circuli data diametro 1 exprimiret, eine jede von den Ziffern des numeratoris ihre Plätze nach einer gewissen, obwohl sehr schweren und undeutlichen Ordnung einnimmt, und ein grosser Theil dieser Schwierigkeit aus der Abwechselung von zehnerley Ziffern entstehet, so könnte man wenigstens diese letztere sehr erleichtern, wenn man setzte circumferentia =

$$m + \frac{a}{10} + \frac{b}{100} + \frac{c}{1000} + \frac{d}{10000} + \text{etc.},$$

allwo m pro lubitu so angenommen werden kann, dass circumf. $- m < \frac{1}{9}$, hernach aber ein jeder von den numeratoribus a, b, c, etc. entweder 0 oder 1 würde, welches

allezeit möglich ist. Wenn nun solchergestalt die series, deren numeratores alle entweder 0 oder 1 sind, auf eine gewisse Anzahl von terminis continuiret werden, so stünde zu versuchen, ob sich nicht unter diesen 0 und 1 eine gewisse Ordnung zeigen möchte? Dass ein ordo numerorum circulantium herauskommen sollte, ist zwar nicht zu vermuthen, weil sonst der ganze numerus rationalis seyn müsste; es kann aber nichts desto weniger progressiones non circulantes geben, die eine offenbare Ordnung halten, als

$$0 + 1 + 0 + 0 + 1 + 0 + 0 + 0 + 1 + \text{etc.}$$

und unzählige andere. Wenn nun, in praesenti casu ein ordo certa lege variabilis entdecket würde, so glaubte ich, dass die quadratura circuli in numeris decimalibus noch viel näher gefunden wäre, als es nach der gewöhnlichen extractione radicis möglich ist $\sqrt{2}$ zu finden. Man könnte auch $\sqrt{2}$ so exprimiren $\frac{a}{1} + \frac{b}{2} + \frac{c}{4} + \frac{d}{8} + \text{etc.}$, dass a, b, c, etc. allezeit 0 oder 1 würden, und hier sollte ich fast glauben, dass sich bald eine Ordnung zeigen möchte.

Nachfolgende series scheinet einige Attention zu meritiren

$$\frac{1}{1.2.3} \cdot \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{1.2.3.4.5.2^2} \cdot \frac{1}{6} \pi^4 + \frac{1}{1.2\ldots6.7.2^4} \cdot \frac{1}{6} \pi^6 + \frac{1}{1.2\ldots8.9.2^6} \cdot \frac{5}{6} \pi^8 + \frac{1}{1.2\ldots10.11.2^8} \cdot \frac{691}{210} \pi^{10} + \text{etc.} = 4 - \pi.$$

Goldbach.