LETTRE LXXXIX.

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Recherches ultérieures sur le problème de la courbe catoptrique.

Berlin d. 25. Januar 1746.

— — Die Solution meines problematis catoptrici, welches Ew. zu übersenden die Ehre gehabt, ist vorher hier copirt worden. Ich habe aber seit der Zeit eine weit kürzere Solution gefunden, wobei alle in der vorigen befindlichen Weitläufigkeiten nicht nöthig sind. In beygefügter Figur (Fig. 22), da C das punctum radians und EMB eine curva reflectens quaecunque ist, welche die radios CM und Cm nach MO und mO reflectirt: Wenn die curva EMB gegeben ist, so kann für ein jegliches punctum M das intervallum respondens OR in axe CB nebst dem Winkel CRM gefunden werden. Nun kehre ich die Frage um, und suche die curvam EMB zu bestimmen, wenn eine aequatio quaecunque inter spatium CR et angulum CRM gegeben wird. Denn wenn dieses problema resolvirt worden, so ist es hernach sehr leicht das Hauptproblema zu solviren.

Es sey demnach das Spatium $CR = r$, der Winkel $CRM = \varphi$, sein sinus $= s$ und cosinus $= u$, posito sinu toto $= c$, so dass $ss + uu = cc$ und $d\varphi = \frac{cds}{u} =$ ang. O. Wenn nun O der concursus duorum radiorum reflexorum proximorum ist, so ist klar, dass die particula curvae Mm zu einer ellipsi gehören müsse, deren beide foci in C und O befindlich, und folglich wird seyn: $CM + MO = Cm + mO$. Man verlängere also OM und Om in V und v, so dass $MV = CM$ und $mv = Cm$, so wird seyn $OV = Ov$ und die tangentes in M und m werden die rectas CV und Cv bifariam perpendiculariter schneiden. Man lasse ferner aus C perpendicula CS und Cs auf OV und Ov, so wird der angulus $SCs = O = d\varphi = \frac{cds}{u}$. Es ist aber in dem Dreyeck CSR, sin. tot. $(c) : CR\,(r) =$ sin $CRS\,(s) : CS = \frac{rs}{c}$ und $RS = \frac{ru}{c}$. Also ist $S\sigma : CS = d\varphi \left(\frac{cds}{u}\right)$: sin. tot. (c) oder $S\sigma = \frac{rsd\varphi}{cc} = \frac{rsds}{cu}$. Da aber $sds + udu = 0$, so wird $S\sigma = \frac{-rdu}{c}$. Nun setze man $SV = t$, so ist $sv = t + dt$ und $vs - VS = dt$: Da nun $vs = V\sigma$, so wird $dt = S\sigma = \frac{-rdu}{c}$ und also $t = a - \int\frac{rdu}{c}$. Aus der zwischen r und u gegebenen Verhältniss wird also die Linie $VS = t$ bestimmt, zu welcher wenn man addirt $RS = \frac{ru}{c}$, so bekommt man die Linie $RV = a + \frac{ru}{c} - \int\frac{rdu}{c} = a + \int\frac{udr}{c}$, welches noch viel kürzer hätte gezeigt werden können, da

$$rv - RV = dRV = R\varrho = \frac{udr}{c},$$

weil $Rr = dr$. Hat man also $RV = a + \int\frac{udr}{c}$ gefunden, so ziehe man CV, schneide dieselbe in zwey gleiche Theile in T und richte darauf die Perpendicularlinie TM auf, welche in M nicht nur ein punctum in curva quaesita, sondern auch die positionem tangentis geben wird. Dahero aus einer jeden gegebenen Aequation inter $CR = r$ et $\cos CRM = u$ die curva quaesita EMB determinirt und leicht construirt werden kann, indem man nur immer zu nehmen hat $RV = a + \int \frac{udr}{c}$.

Hieraus ist nun leicht das proponirte problema catoptricum zu solviren, denn da muss aus dem angulo CRM das spatium $CR = r$ dergestalt bestimmt werden, dass wenn man den Winkel CRO anstatt des Winkels CRM setzt, für CR einerley Werth herauskomme. Da nun des Winkels CRO sinus ist $= - s$ und der cosinus $= - u$, so muss r eine solche functio seyn von s und u, welche einerley Werth behalte, wenn gleich für s und u ihre negativa $- s$ und $- u$ gesetzt werden. Folglich muss r eine functio parium dimensionum seyn von s und u, als z. Ex. $r = b + \frac{\alpha s^2 + \beta s u + \gamma u^2}{c}$. Hat man nun r solchergestalt angenommen, so kann daraus die curva problemati satisfaciens folgendergestalt bestimmt werden. Man setze $MR = z$, so wird

$$CM = \sqrt{\left(rr + zz - \frac{2urz}{c}\right)} = RV - z = a + \int \frac{udr}{c} - z.$$

Folglich wird $rr - \frac{2urz}{c} = \left(a + \int \frac{udr}{c}\right)^2 - 2\left(a + \int \frac{udr}{c}\right) z$ und also

$$z = \frac{\left(a + \int \frac{udr}{c}\right)^2 - rr}{2\left(a + \int \frac{udr}{c} - \frac{ur}{c}\right)}.$$

Aus z findet man ferner $PM = y = \frac{sz}{c}$ und $PR = \frac{uz}{c}$, da-

hero wird $CP = x = r - \frac{uz}{c}$ und, wie schon gefunden ist, $CM = a + \int \frac{udr}{c} - z$.

Will man nun curvas algebraicas haben, so muss für r eine solche functio von s und u, jedoch nach der obigen Vorschrift angenommen werden, dass sich die formula $\int \frac{udr}{c}$ integriren lasse.

Um aber formulas generales für alle mögliche curvas algebraicas zu finden, so setze ich

$$\int \frac{udr}{c} = \frac{ur}{c} - \int \frac{rdu}{c} = \frac{ur}{c} - v, \text{ oder } \int \frac{rdu}{c} = v.$$

Weil nun r eine functio parium dimensionum ipsarum s et u seyn muss, so wird $v = \int \frac{rdu}{c}$ eine functio imparium dimensionum. Man nehme also für v eine solche functionem quamcunque an, so wird $r = \frac{cdv}{du}$ und $\int \frac{udr}{c} = \frac{udv}{du} - v$. Hieraus wird ferner

$$RM = z = \frac{\left(a - v + \frac{udv}{du}\right)^2 - \frac{cc\,dv^2}{du^2}}{2(a - v)},$$

das ist

$$MR = z = \frac{a - v}{2} + \frac{udv}{du} - \frac{(cc - uu)dv^2}{2(a - v)du^2} = \frac{a - v}{2} + \frac{udv}{du} - \frac{ssdv^2}{2(a - v)du^2},$$

wegen $ss = cc - uu$

$$PM = y = \frac{(a - v)s}{2c} + \frac{sudv}{cdu} - \frac{s^3 dv}{2(a - v)c\,du^2}$$

$$CP = x = \frac{ssdv}{cdu} - \frac{u(a - v)}{2c} + \frac{ussdv^2}{2(a - v)c\,du^2}$$

$$CM = \frac{a - v}{2} + \frac{ssdv^2}{2(a - v)du^2}.$$

Hieraus ist $CM + MR = a - v + \frac{udv}{du}$, und positis u, s negativis, in welchem Fall auch v negativum wird, so bekommt man die summam radiorum infra axem $= a + v - \frac{u\,dv}{du}$, dahero klar ist, dass die summa omnium radiorum, d. i. der Weg, welchen ein jeglicher radius ex C egressus, donec eodem post geminam reflexionem revertatur, seyn wird $= 2a$; welche Eigenschaft, ungeacht sie unmittelbar aus der Betrachtung, dass $CM + MO = Cm + mO$, folget, so haben doch Ew. mir dieselbe zuerst entdeckt. Im übrigen kommen diese Formuln mit meinen vorhergehenden völlig überein, nur dass diese zweymal kleiner sind, als jene. Wann das spatium CR maximum wird, ist aus der Formul $CR = \frac{c\,dv}{du}$ leicht zu sehen, nehmlich wenn $ddv = 0$. Es ist aber hiebey zu merken, dass s und u immer kleiner seyn müssen als c, indem sonst die formulae imaginariae werden. Es sey z. Ex. $v = \frac{u^3}{cc}$, so wird $CR = \frac{3uu}{c}$, dessen Werth am grössten wird, wenn $u = \pm c$; also ist in diesem Fall der grösste valor $CR = 3c$, und der kleinste $CR = 0$. Man bekommt also die völlige curvam, wenn man successive dem u alle mögliche valores gibt von -1 bis zum $+1$.

Es ist ganz richtig, dass der auf die quadraturam circuli gesetzte Preis Demjenigen mit Recht gebührte, welcher eine der extractioni radicis quadratae ähnliche Operation erfände, um die Zahl 3,14159 etc. nach Belieben immer weiter fortzusetzen. In dieser Absicht bin ich auf den Gedanken gekommen, ob es nicht möglich, divisores certa lege progredientes zu finden, aus welchen nach der letztbeschriebenen Divisionsregel eben diese Zahl 3,14159 herausgebracht würde; denn diese Art schien mir eben den gradum facilitatis, welchen Ew. verlangen, noch vor der extractioni radicis zu haben.

Euler.

LETTRE XCI.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Projets d'inscriptions pour des médailles en l'honneur du Roi.

Berlin d. 5 Febr. 1746.

Ew. bitte nicht ungütig zu deuten, dass ich die Freyheit nehme Denselben nachfolgende problemata betreffend einige médailles, welche I. K. M. prägen zu lassen Allergnädigst befohlen haben, vorzulegen. Als nach dem ersten schlesischen Krieg Ew. die Güte gehabt mir einige Inventionen zu den damals projectirten médailles zu überschicken, so haben dieselben bey dem Staats-Ministerio allhier eine völlige Approbation erhalten, obgleich wegen anderer Umstände keine médailles zum Vorschein gekommen. Anjetzo ist mir nun wiederum eine ordre aus dem Ministerio zugeschickt worden, in welcher 5 Inventionen zu médailles verlangt werden:

I. Auf die Bataille bey Sorr.

II. Auf die Expedition nach Sachsen, da I. K. M. sich so schnell gegen Görlitz gewendet und allda den Feind bis in Böhmen zurückgetrieben.