LETTRE XCIII.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Réponse à la précédente. Plusieurs théorèmes de la doctrine des séries. Concours de l'académie de Berlin sur la théorie des vents.

Berlin d. 5. April 1746.

— — Dass Ew. meine ziemlich in Eil aufgefassten Fragen über die Cometen einiger Aufmerksamkeit gewürdiget, erkenne ich als ein Zeichen Dero ganz besondern Gewogenheit. Ich habe aber noch starke Zweifel, ob sich die phaenomena cometarum eorumque caudarum bloss allein dadurch erklären lassen, dass man annimmt, ihre Cörper seyen würklich entzündet. Denn ausserdem, dass eine blosse Erleuchtung nicht hinlänglich ist in dem aethere eine Helle hervorzubringen, sondern dazu noch in derselben Gegend solche Cörperlein erfordert werden, welche die Erleuchtung empfangen, und daher einen Schein zu uns zurückwerfen: so ist auch die Abweichung der caudae eines Cometen ab

oppositione solis ein solches phaenomenon, welches eine besondere Erklärung zu erfordern scheinet. Die Idee, welche ich in diesen Fragen kürzlich entworfen, und darin bestehet, dass die durch die grosse Atmosphaer eines Cometen durchstreichenden Sonnenstrahlen einige subtile particulas daraus mit sich fortreissen, habe ich letztens weitläufiger ausgeführt und ziemlich deutlich dargethan, dass auf solche Art nicht nur die Cometenschweife, sondern auf unserer Erde die lumina borealia und um die Sonne selbst das lumen Cassinianum entstehen. Diese Ausführung hat auch dem Herrn de Maupertius so wohl gefallen, dass er derselben völlig beypflichtet.

Ew. Idée das problema catoptricum zu solviren, gibt zwar leichte Formuln, allein da die positio lineae CO nicht bestimmt wird und das elementum curvae Mm wenig zu Bestimmung der krummen Linien, insonderheit wenn algebraische verlangt werden, beyträgt, so sehe ich noch nicht ab, wie die natura functionis q determinirt werden müsste, dass die beyden Reflexionspuncta M et N in eandem lineam curvam continuam zu liegen kämen.

Ueber die seriem $1 + 1.3 + 1.3.5 + 1.3.5.17 +$ etc. erstaunte ich anfänglich; als ich aber dieselbe genauer betrachtete, sahe ich bald, dass ich den terminum generalem davon schon vor einiger Zeit unter andern Umständen ausgedrückt hatte. Denn ich fand, dass wenn
$(1+a)(1+a^2)(1+a^4)(1+a^8)(1+a^{16})\ldots(1+a^{2^n}) = s$
so ist $(1-a)s = 1 - a^{2^{n+1}}$, und also $s = \frac{a^{2^{n+1}}-1}{a-1}$.
Dahero wenn $a=2$, so ist $1.3.5.17\ldots(2^{2^n}+1) = 2^{2^{n+1}} - 1$.
Dieses hatte ich schon angemerket, als ich suchte, was für

eine series herauskomme, wenn man dieses productum infinitum $(1+a)(1+a^2)(1+a^4)(1+a^8)$ etc. wirklich evolvirte, da ich dann gefunden, dass diese series geometrica $1+a+a^2+a^3+a^4+\text{etc.}=\frac{1}{1-a}$ herauskomme. Evolvirt man aber dieses Product $(1-a)(1-a^2)(1-a^4)(1-a^8)$ etc., so bekommt man $1-a-a^2+a^3-a^4+a^5+a^6-a^7-a^8+a^9+a^{10}-a^{11}+a^{12}-a^{13}-a^{14}+a^{15}-a^{16}+a^{17}$ etc., wo die ordo signorum merkwürdig ist. Von dieser Art habe ich noch nachfolgende theoremata gefunden:

Theorema. Si sit

$$s=(1-na)(1-n^2a)(1-n^3a)(1-n^4a)(1-n^5a)\text{ etc. in infin.}$$

erit

$$s=1-\frac{na}{1-n}+\frac{n^3a^2}{(1-n)(1-n^2)}-\frac{n^6a^3}{(1-n)(1-n^2)(1-n^3)}$$
$$+\frac{n^{10}a^4}{(1-n)(1-n^2)(1-n^3)(1-n^4)}-\text{etc.}$$

et

$$\frac{1}{s}=1+\frac{na}{1-n}+\frac{n^2a^2}{(1-n)(1-n^2)}+\frac{n^3a^3}{(1-n)(1-n^2)(1-n^3)}$$
$$+\frac{n^4a^4}{(1-n)(1-n^2)(1-n^3)(1-n^4)}+\text{etc.}$$

Ew. glaube ich auch schon geschrieben zu haben, dass wenn man dieses productum infinitum

$$(1-a)(1-a^2)(1-a^3)(1-a^4)(1-a^5)\text{ etc.}$$

evolvirt, diese series herauskomme

$$1-a-a^2+a^5+a^7-a^{12}-a^{15}+a^{22}+a^{26}-a^{35}-a^{40}+\text{etc.},$$

wo der ordo exponentium sehr merkwürdig ist, und sich per inductionem also bestimmen lässt, dass alle in hac formula $\frac{3xx\pm x}{2}$ enthalten sind, ungeacht ich diese legem observatam noch nicht ex rei natura habe herausbringen können.

Theor. Si fuerit in serie $\overset{1}{A}, \overset{2}{B}, \overset{3}{C}, \ldots \overset{x}{P}, \overset{x+1}{Q}$,

$Q=mP^2+nP+\frac{nn-2n-8}{4m}$, ubi m et n sunt numeri constantes, quaerantur numeri F et G ut sit

$$F+G=mA+\tfrac{1}{2}n \text{ et } FG=1,$$

eritque

$$P=\frac{F^{2^{x-1}}+G^{2^{x-1}}}{m}-\frac{n}{2m}.$$

Theor. Si fuerit in serie $\overset{1}{A}, \overset{2}{B}, \overset{3}{C}, \ldots \overset{x}{P}, \overset{x+1}{Q}$,

$$Q=mP^2+nP+\frac{nn-2n}{4m} \text{ erit } P=\frac{(mA+\frac{1}{2}n)^{2^{x-1}}}{m}-\frac{n}{2m},$$

welches Ew. theoremata sind.

Folgende theoremata scheinen auch einiger Aufmerksamkeit werth zu seyn:

Theor. Si n sit numerus integer affirmativus quicunque, erit

$$\frac{1-a^n}{1-a}+\frac{(1-a^n)(1-a^{n-1})}{1-a^2}+\frac{(1-a^n)(1-a^{n-1})(1-a^{n-2})}{1-a^3}+\text{etc.}=n.$$

Theor. Si n sit numerus integer affirmativus quicunque, erit

$$1-a^{n-1}+a^{2n-3}-a^{3n-6}+a^{4n-10}-a^{5n-15}+a^{6n-21}-\text{etc.}=0$$

exclusis scilicet terminis, qui exponentes habent negativos.

Theor. Sit in circulo arcus $90^\circ=q$, sumaturque arcus quicunque s, cujus sinus sit $=a$, $\sin 2s=b$, $\sin 3s=c$, $\sin 4s=d$ etc. erit semper

$$q=\frac{1}{2}s+a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{3}c+\frac{1}{4}d+\frac{1}{5}e+\text{etc.}$$

Theor. In circulo radii $=1$ capiatur arcus quicunque s, cujus tangens sit $=a$, $\tan \frac{1}{2}s=b$, $\tan \frac{1}{4}s=c$, $\tan \frac{1}{8}s=d$, $\tan \frac{1}{16}s=e$ etc., erit

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{a} + \frac{1}{2}b + \frac{1}{4}c + \frac{1}{8}d + \frac{1}{16}e + \text{etc.}$$

Ich bin jetzund mit Durchlesung derjenigen Pièцen, welche über die von der Akademie aufgegebene Frage von der Ursach und der Ordnung der Winde sind eingesandt worden, beschäftiget. Es sind darüber 10 eingelaufen, unter welchen sich eine, so vor allen andern in Betrachtung gezogen zu werden verdient, befindet. Die Devise, so sich zu Ende derselben befindet, ist auch schön; sie lautet also:

Haec ego de ventis: dum ventorum ocyor alis
Palantes pellit populos Fridericus, et orbi,
Insignis lauro, ramum praetendit olivae. *)

*) C'est la pièce de concours de d'Alembert. Comp. dans le 2 volume, les lettres de Daniel Bernoulli sur ce concours.

Euler.

LETTRE XCIV.

Goldbach à Euler.

Sommaire. Suite des recherches sur les séries. Remarques ultérieures sur le problème de la courbe catoptrique.

St. Petersburg d. 5. Mai 1746.

Den terminum generalem seriei

$$1 + 1.3 + 1.3.5 + 1.3.5.17 + \text{etc.}$$

hatte ich, als mein letztes Schreiben abging, nur in potestate, und dachte nicht, dass selbiger so leicht seyn sollte, indem ich dessen sonst gar keine Erwähnung gethan haben würde.

Ich weiss nicht, ob man methodum hat von dergleichen seriebus als diese ist

$$\frac{1.3.5}{2.4.8} - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.10} + \frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.12} - \frac{1.3.5.7.9.11}{2.4.6.8.10.14} + \text{etc.}$$

$$= 2^{-\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}} - 2,$$

cujus lex progressionis est $\frac{-A(2x+5)(x+3)}{2(x+2)(x+4)} = B$, die summas zu finden.