$$1+\frac{1}{4}+\frac{1.4}{4.8}+\frac{1.5.6}{4.8.12}+\frac{1.6.7.8}{4.8.12.16}+\frac{1.7.8.9.10}{4.8.12.16.20}+\text{etc.}=2.$$

Diese wird leicht in diese Form verwandelt:

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1.3}{4.6}+\frac{1.3.5}{4.6.8}+\frac{1.3.5.7}{4.6.8.10}+\text{etc.}=2\left(1-(1-1)^{\frac{1}{2}}\right)=2,$$

in welchem Fall die Richtigkeit leicht zu ersehen.

Ich glaube kaum, dass die ratio diametri ad peripheriam $1:\pi$ leichter per approximationem gefunden werden könne, als durch Hülfe beyder folgenden serierum:

$$p=\frac{1}{5}-\frac{1}{3.5^3}+\frac{1}{5.5^5}-\frac{1}{7.5^7}+\frac{1}{9.5^9}-\frac{1}{11.5^{11}}+\text{etc.}$$

$$q=\frac{1}{239}-\frac{1}{3.239^3}+\frac{1}{5.239^5}-\frac{1}{7.239^7}+\frac{1}{9.239^9}-\frac{1}{11.239^{11}}+\text{etc.}$$

Denn wenn hieraus die Werthe von p und q gefunden werden, so ist $\pi=16p-4q$.

Nach dem letzt ergangenen Urtheil der Akademie zu Paris über den Magneten ist meiner pièce der dritte Theil des dreyfachen Preises zuerkannt worden, wie Ew. schon aus unsern Zeitungen werden ersehen haben. Hr. Bernoulli hat auch ein Drittel bekommen. Hingegen haben wir den Preis der hiesigen Akademie von 50 Ducaten, über die Winde, der pièce: *Haec ego de ventis* etc. zuerkannt, davon der auctor Hr. D'Alembert aus Paris ist.

Euler.

LETTRE XCVI.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Problème catoptrique. Suite.

Berlin d. 14. Juni 1746.

Ew. letzt überschriebene Solution des problematis catoptrici hat mich anfänglich nicht wenig frappirt, da dieselbe keine differentialia in sich enthält und ich doch versichert bin, dass die Betrachtung der Reflexion nothwendig differentialia erfordere. Als ich aber die Sach genauer erwogen, habe ich bald gesehen, dass die drey gefundenen Formuln für die Linie CR unmöglich zwey quantitates incognitas determiniren können, sondern nachdem man eine bestimmet, eine aequatio identica herauskommen müsse.

Denn in einem jeglichen triangulo CMN (Fig. 24) kann eine Seite MN allzeit in O dergestalt geschnitten werden, dass $CM+MO=CN+NO$, wodurch also keine besondere

Beschaffenheit bestimmet wird. Wenn man nun setzt $CM+MO = CN+NO = a$, $CM = \frac{a-p}{2}$, $MO = \frac{a+p}{2}$, $CN = \frac{a+\nu}{2}$ und $NO = \frac{a-\nu}{2}$, so kann daraus die Linie $CO = q$ bestimmt werden, denn es wird $qq = \frac{aa(\nu-p)+2ap\nu}{2a-\nu+p}$ oder $qq+aa = \frac{2a(aa+p\nu)}{2a-\nu+p}$. Setzt man nun ferner $RO = z$ und den cosinum des Winkels $BRO = u$, so kann per p, ν, z und a der Werth von u gefunden werden. Das intervallum z aber bleibet willkührlich, weil noch kein Umstand in Betrachtung gezogen worden, wodurch z bestimmt werden könnte. Sollen aber die Linien CM und MO, item CN und NO lege reflexionis aequaliter ad curvam inclinirt seyn, so müsste in situ proximo das punctum O unverändert bleiben, und folglich sowohl diff. $CS = 0$ als diff. $SO = 0$, wodurch das problema plus quam determinatum würde, oder vielmehr nur eine einzige lineam satisfacientem, nehmlich die ellipsin geben würde. Die Ursach davon ist diese: dass man ohne Nothwendigkeit angenommen $CM+MO = CN+NO$; da diese beiden valores auch ungleich seyn können, wenn nur ihre Summ $CM+MN+NO$ constans bleibt. Endlich ist auch hier nicht der Hauptumstand in Betrachtung gezogen worden, dass die beyden puncta M und N in eadem linea curva continua seyn müssen. Uebrigens glaube ich kaum, dass von diesem problemate eine kürzere und leichtere Solution gefunden werden könne, als diese: Sit $CMNC$ radius post geminam reflexionem ad C reversus, sumtaque pro lubitu recta CB pro axe, ad quem curvae quaesitae aequatio referatur. Vocetur $CR = r$, angulus $CRM = \varphi$, ejus sinus $= s$ et cosinus $= u$, posito radio $= 1$, ita ut sit: $ss+uu = 1$ et $d\varphi = \frac{ds}{u} = \frac{-du}{s}$. Hic angulum φ consideravi quatenus ad punctum M spectat, pro puncto N autem is abibit in CRO, et quia in partem contrariam cadit, erit is $= -180^0+\varphi$, ejusque ergo sinus $= -s$ et cosinus $= -u$. Quia jam punctum R ad utrumque punctum M et N aequaliter pertinere debet, quantitatem $CR = r$ ita per s et u exprimi oportet, ut eundem valorem retineat, etiamsi pro s et u ponantur $-s$ et $-u$. Unde hujusmodi erit relatio inter r et s, u: $r =$

$$\alpha+\beta ss+\gamma su+\delta uu+\varepsilon s^4+\zeta s^3 u+\text{etc.},$$

vel in fractionibus

$$r = \frac{\alpha+\beta ss+\gamma su+\delta uu+\varepsilon s^4+\zeta s^3 u+\eta s^2 u^2+\theta su^3+\text{etc.}}{A+Bss+Csu+Duu+Es^4+Fs^3 u+Gs^2 u^2+Hsu^3+\text{etc.}}$$

vel etiam

$$r = \frac{\alpha s+\beta u+\gamma s^3+\delta s^2 u+\varepsilon su^2+\zeta u^3+\eta s^5+\theta s^4 u+\text{etc.}}{As+Bu+Cs^3+Ds^2 u+Esu^2+Fu^3+Gs^5+Hs^4 u+\text{etc.}}$$

Quaecunque ergo hujus generis aequatio pro r definiendo assumitur, punctum R aeque respiciet utrumque punctum M et N, ac propterea puncta M et N in una eademque linea curva continua erunt sita. Superest ergo ut ex hujusmodi aequatione, inter r, s et u assumta, ipsa curva definietur, et aequatio inter coordinatas $CP = x$ et $PM = y$ eliciatur. In hunc finem consideretur reflexio proxima $CmnC$, sitque O intersectio rectarum MN et mn: atque ex natura reflexionis manifestum est fore particulam curvae Mm elementum ellipseos focis C et O, atque Nn elementum ellipseos iisdem focis C et O descriptae. Hinc ergo habebimus $CM+MO = Cm+mO$, et $CN+NO = Cn+nO$. Sed sufficit alteram tantum conditionem $CM+MO = Cm+mO$ spectasse, quia per determinationem ipsius r alterius ratio jam simul involvitur. Cum igitur sit $CR = r$, erit $Rr = dr$, et ex r in OM demisso perpendiculo rs fiet $rs = sdr$ et

$Rs = udr$. Appelletur $CM + MR = q$, erit $Cm + mr = q + dq$, ideoque ob $CM + MO = Cm + mO$, fiet $q + OR = = q + dq + Or$, seu $OR - Or = Rs = dq = udr$, ita ut hinc prodeat $q = a + \int udr = CM + MR$. Sit jam $MR = z$, erit $PM = y = sz$, $PR = uz$ et $CP = x = r - uz$, unde fit $CM = \sqrt{(rr - 2urz + zz)}$ ob $ss + uu = 1$. At est $CM = q - z$, ergo $\sqrt{(rr - 2urz + zz)} = q - z$, sumtisque quadratis: $rr - 2urz = qq - 2qz$, qua fit $z = \frac{qq - rr}{2q - 2ur}$. Assumto ergo valore quocunque idoneo pro r, in s et u expresso, hinc quaeratur $q = a + \int udr$, porroque $z = \frac{qq - rr}{2q - 2ur}$, quibus inventis erit $x = r - uz$ et $y = sz$, sicque habebitur curva problemati satisfaciens, quae quidem erit transcendens, si formula $\int udr$ algebraice exprimi nequeat. Ad curvas ergo algebraicas inveniendas ejusmodi functionem pro r eligi oportet ut formula $\int udr$ fiat integrabilis, quod quidem hoc modo generaliter praestari potest: Cum sit $\int udr = ur - \int rdu$, ponatur $\int rdu = v$, fietque $r = \frac{dv}{du}$. Quo igitur r fiat functio parium dimensionum ipsarum s et u, ut supra requirebatur, necesse est ut v sit functio imparium dimensionum ipsarum s et u seu talis, quae abeat in $-v$, si pro s et u ponantur $-s$ et $-u$. Hujusmodi ergo functione pro v assumta, erit $r = \frac{dv}{du}$, ubi ob $ds = -\frac{udu}{s}$, differentialia destruentur, ita ut r fiat quantitas finita algebraica. Inventa autem r erit $\int udr = ur - v$ et $q = a + ur - v$ atque $z = \frac{qq - rr}{2q - 2ur}$, ex quibus denique elicientur coordinatae $CP = x = r - uz$ et $PM = y = sz$, ambae per s et u expressae, unde curva construi et aequatio inter x et y eliminandis s et u ope $ss + uu = 1$, erui poterit.

Ex. gr. Cum v debeat esse functio imparium dimensionum ipsarum s et u, assumatur $v = bs + cu$, erit

$$dv = bds + cdu = \frac{-budu}{s} + cdu$$

atque $r = \frac{-bu}{s} + c$. Tum $q = a - \frac{buu}{s} - bs = a - \frac{b}{s}$; porro ob $qq = aa - \frac{2ab}{s} + \frac{bb}{ss}$ et $rr = \frac{bbuu}{ss} - \frac{2bcu}{s} + cc$, erit

$$z = \frac{aa - \frac{2ab}{s} + bb + \frac{2bcu}{s} - cc}{2a - 2bs - 2cu},$$

seu

$$z = \frac{(aa + bb - cc)s - 2ab + 2bcu}{2s(a - bs - cu)}.$$

Unde fiunt coordinatae

$$CP = x = \frac{2ac - 2bcs - (aa - bb + cc)u}{2(a - bs - cu)},$$

$$PM = y = \frac{-2ab + 2bcu + (aa + bb - cc)s}{2(a - bs - cu)},$$

unde eliminandis s et u, aequatio resultat inter x et y duarum tantum dimensionum, qua natura ellipsis ad rectam quamcunque per focum C tanquam axem relata exprimitur. Si sit $b = 0$, recta CB per alterum quoque focum transibit.

Letztens habe gefunden, dass diese expressio $(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}}$ einen valorem realem habe, welcher in fractionibus decimalibus $= 0{,}2078795763$, welches mir merkwürdig zu seyn scheinet.

Euler.