LETTRE XCVIII.

═

EULER à GOLDBACH

SOMMAIRE. Mêmes sujets.

Berlin d. 26. Juli 1746.

— — Für Dero hochgeneigte Gratulation zu dem erhaltenen Theil des Pariser Preises statte allen gehorsamsten Dank ab. Dieses war das vierte Mal, dass ich etwas von diesem Preis bekommen. Auf das künftige Jahr, da die Frage von Findung der Zeit durch himmlische Beobachtungen zur See vorgelegt ist, habe ich auch schon eine pièce hingeschickt. Die Frage aber für 1748 ist meines Erachtens so schwer, dass ich noch nicht weiss, ob ich im Stande seyn werde etwas darüber zu verfertigen; indessen wollte ich mir von Ew. dazu eine schöne Devise gehorsamst ausgebeten haben.

Dass die Summ dieser seriei

$$1+\frac{n}{4}+\frac{n(n+3)}{4.8}+\frac{n(n+4)(n+5)}{4.8.12}+\text{etc.}$$

gleich ist 2^n, hatte ich auf eine sehr weitläufige Art herausgebracht, und kam mir um so viel merkwürdiger vor, weil ich solches durch keine mir bekannte Methode füglich beweisen konnte. Auf eine ähnliche Weise habe ich seit der Zeit gefunden, dass diese series:

$$1+\frac{n}{4}x^2+\frac{n(n+3)}{4.8}x^4+\frac{n(n+4)(n+5)}{4.8.12}x^6+\frac{n(n+5)(n+6)(n+7)}{4.8.12.16}x^8$$
$$+\text{etc.}=2^n\left(\frac{1-\sqrt{(1-xx)}}{xx}\right)^n,$$

welche series, wenn $x=1$, in die vorige verwandelt wird. Setzt man $xx=\frac{1}{2}$, so wird

$$1+\frac{n}{8}+\frac{n(n+3)}{8.16}+\frac{n(n+4)(n+5)}{8.16.24}+\frac{n(n+5)(n+6)(n+7)}{8.16.24.32}+\text{etc.}$$
$$=(4-2\sqrt{2})^n.$$

Wollte man aber, um die Summ dieser seriei zu finden, alle coëfficientes evolviren und die seriem nach den Potestäten des n rangiren, so würde man auf so sehr verwirrte series kommen, dass schwerlich daraus etwas zu finden seyn würde. Denn wenn man z. Ex. setzt

$$A\ldots\ldots 1+\frac{n}{4}+\frac{n(n+3)}{4.8}+\frac{n(n+4)(n+5)}{4.8.12}+\text{etc.}=$$
$$1+\beta n+\gamma n^2+\delta n^3+\varepsilon n^4+\text{etc.}$$

so wird

$$\beta=\frac{1}{4}+\frac{3}{4.8}+\frac{4.5}{4.8.12}+\frac{5.6.7}{4.8.12.16}+\frac{6.7.8.9}{4.8.12.16.20}+\text{etc.}$$

welche series negative sumta $(-\beta)$ den terminum exponentis $\frac{1}{2}$ in dieser serie ausdrückt

$$\overset{\frac{1}{2}}{-\beta};\ \overset{1}{0};\ \overset{2}{\frac{1}{2}};\ \overset{3}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}};\ \overset{4}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}};\ \overset{5}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}};$$
$$\overset{6}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}};\ \text{etc.}$$

folglich ist der terminus indicis $\frac{3}{2} = -\beta + 1$, der terminus indicis $\frac{5}{2} = -\beta + 1 + \frac{1}{3}$, und der terminus indicis

$$(\infty + \tfrac{1}{2}) = -\beta + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \text{etc.};$$

der terminus indicis ∞ aber ist $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} +$ etc. Da nun lege seriei die termini infinitesimi einander gleich seyn müssen, so wird

$$\beta = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \text{etc.},$$

wie Ew. angemerket. Dieses gibt sich aber aus der Summ der seriei A, welche ist $= 2^n$; denn, wenn $l2$, oder

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \text{etc.}$$

gesetzt wird $= \beta$, so ist

$$2^n = 1 + \beta n + \frac{\beta^2 n^2}{1.2} + \frac{\beta^3 n^3}{1.2.3} + \frac{\beta^4 n^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

folglich ist in der angenommenen Form

$$1 + \beta n + \gamma n^2 + \delta n^3 + \varepsilon n^4 + \text{etc.},\ \gamma = \frac{1}{2}\beta^2,\ \delta = \frac{1}{6}\beta^3,\ \text{etc.},$$

welches aus der serie A selbst schwerlich würde herausgebracht werden können.

Gleiche Schwierigkeit würde man finden, wenn man auf diese Art die Summ dieser seriei suchen wollte

$$B \ldots\ldots 1 + \frac{n^2}{1.2} + \frac{n^2(n^2+4)}{1.2.3.4} + \frac{n^2(n^2+4)(n^2+16)}{1.2\ldots6} + \frac{n^2(n^2+4)(n^2+16)(n^2+36)}{1.2\ldots8} + \text{etc.}$$

Wenn $\pi = 3{,}14159$ etc. und

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2\ldots6} + \text{etc.}$$

so ist die Summ dieser seriei

$$B = \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}n\pi} + \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}n\pi}.$$

Hingegen ist diese series

$$C \ldots\ldots 1 + \frac{n^2}{1.2} + \frac{n^2(n^2+1)}{1.2.3.4} + \frac{n^2(n^2+1)(n^2+4)}{1.2\ldots6} + \frac{n^2(n^2+1)(n^2+4)(n^2+9)}{1.2\ldots8} + \text{etc.} = \frac{1}{2} e^{\frac{1}{3}n\pi} + \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{3}n\pi},$$

oder es ist

$$C = 1 + \frac{n^2\pi^2}{3.6} + \frac{n^4\pi^4}{3.6.9.12} + \frac{n^6\pi^6}{3.6.9.12.15.18} + \text{etc.}$$

folglich hat man

$$\frac{\pi^2}{18} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1.2}{3.4.5.6} + \frac{1.2.3}{4.5.6.7.8} + \frac{1.2.3.4}{5.6.7.8.9.10} + \text{etc.}$$

und

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{1}{6} + \frac{2.4.6}{3.5.7}\cdot\frac{1}{8} + \frac{2.4.6.8}{3.5.7.9}\cdot\frac{1}{10} + \text{etc.}$$

Ew. Erfindung von der Summ solcher serierum

$$\alpha a - \beta a^4 + \gamma a^9 - \delta a^{16} + \text{etc.}$$

wenn α, β, γ, δ, etc. gewisse Werthe haben, ist ungemein sinnreich. Ich habe zwar bald gesehen, dass solche series herauskommen, wenn man den terminum exponentis $\frac{1}{2}$ in dieser serie a^1, a^4, a^9, a^{16} etc., welcher ist $\sqrt[4]{a}$, auf gewöhnliche Art suchet; allein es ist zu bedauern, dass alle diese coëfficientes α, β, γ, δ, etc. unendlich werden, indem $\alpha = (1-1)^{-\frac{1}{2}}$, $\beta = \frac{1}{2}(1-1)^{-\frac{3}{2}}$, $\gamma = \frac{1.3}{2.4}(1-1)^{-\frac{5}{2}}$, $\delta = \frac{1.3.5}{2.4.6}(1-1)^{-\frac{7}{2}}$ etc. werden.

Der Zweifel, welchen Ew. gegen meine Solution des bekannten problematis catoptrici zu machen belieben, als wenn dieselbe nur allein die ellipsin gäbe, wird dadurch leicht gehoben, wenn man betrachtet, dass (Fig. 25) das punctum O nicht constans, sondern variabile angenommen wird, indem es ein punctum in caustica EOo ist. Denn, ungeacht ex natura reflexionis ist $CM + MO = Cm + mO$, so ist doch nicht diff. $(CM + MO) = o$, sondern $= Oo$, und also $CM + MO = \text{Const.} + \text{arcu causticae } EO$, welche Eigenschaft allen causticis gemein ist. Uebrigens geben meine Formuln solche curvas, welche offenbar keine ellipses sind. Es ereignet sich hier nehmlich eben der Fall, als bey Untersuchung des radii osculi MO einer krummen Linie AM (Fig. 26). Denn ungeacht $MO = mO$, so folgt doch nicht, dass diff. $MO = 0$, noch dass $MO = \text{Const.}$, sondern weil das punctum O variabile, nehmlich in evoluta ist, so ist diff. $MO = mo - MO = Oo$ und also $MO = \text{Const.} + \text{arcu evolutae } EO$.

Wenn von der serie $1 + \frac{5}{3} + \frac{43}{3.5} + \frac{531}{3.5.7} + \frac{8601}{3.5.7.9} + \text{etc.}$ der terminus ordine $\frac{1}{2}$ gesucht wird, so wird derselbe $= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \text{etc.}$, aus welcher Betrachtung Ew. ohne Zweifel jene seriem gefunden. Es ist aber merkwürdig, dass die lex progressionis sich so bequem ausdrücken lässt.

Stirling hat angemerkt, dass die Summ von dieser serie

$$\frac{1}{t} + \frac{u}{t(t+1)} + \frac{u(u+1)}{t(t+1)(t+2)} + \frac{u(u+1)(u+2)}{t(t+1)(t+2)(t+3)} + \text{etc.}$$

$$\text{sey} = \frac{1}{t-u},$$

ich habe aber gefunden, dass diese series noch weit generaler gemacht werden kann

$$\frac{1}{t} + \frac{u}{t(t+a)} + \frac{u(u+a)}{t(t+a)(t+b)} + \frac{u(u+a)(u+b)}{t(t+a)(t+b)(t+c)} + \text{etc.}$$

$$= \frac{1}{t-u},$$

wenn nur a, b, c, d, etc. dergestalt fortgehen, dass

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \text{etc.}$$

eine summam infinitam ausmachen. Da nun solches geschieht, wenn a, b, c, d, etc. numeri primi sind, so kann man sagen, dass z. Ex.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2.4} + \frac{1.3}{2.4.5} + \frac{1.3.4}{2.4.5.7} + \frac{1.3.4.6}{2.4.5.7.9} + \text{etc.} = 1,$$

oder dass

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{4.5} + \frac{3.4}{4.5.7} + \frac{3.4.6}{4.5.7.9} + \frac{3.4.6.8}{4.5.7.9.13} + \text{etc.} = 1.$$

wo die factores der Zähler sind numeri primi $+1$, die factores der Nenner aber numeri primi $+2$.

Euler.