LETTRE XCIX.

=

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Mêmes sujets.

St. Petersburg d. 27. August 1746.

So oft in den summis serierum selbst quantitates per series infinitas exprimendae vorkommen, mögen die coëfficientes ipsius n wohl aus sehr schweren seriebus bestehen; dass aber die series

$$\beta = \frac{1}{4} + \frac{3}{4.8} + \frac{4.5}{4.8.12} + \text{etc.} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \text{etc.}$$

hatte ich auf eine von Ew. Methode sehr unterschiedene Art, und sogar ohne die terminos $\frac{1}{4} + \frac{3}{4.8} +$ etc. zu evolviren, aus diesem einigen raisonnement gefunden: Weil

$$2^n = (1+1)^n = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3} + \text{etc.}$$

und in dieser serie der coëfficiens ipsius n ist

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dotplus \frac{1}{4} + \text{etc.},$$

so muss er auch in allen seriebus welche $= 2^n$ sind, eben denselben valorem haben. Nun zweifelte ich im geringsten nicht, dass die von Ew. angeführte series nicht recht sollte summiret seyn, und konnte dahero den valorem β mit grosser Gewissheit angeben.

Dass die in meinem vorigen angenommenen quantitates α, β, γ, etc. unendliche valores andeuten, habe ich wohl gewusst, und zweifle sehr ob es möglich ist, an deren Stelle valores finitos zu substituiren; warum aber $\alpha = (1-1)^{-\frac{1}{2}}$, $\beta = \frac{1}{2}(1-1)^{-\frac{3}{2}}$ etc. sehe ich noch nicht ein.

Dass das punctum O (Fig. 27) nicht anders als in der ellipsi fixum seyn könnte, hatte ich zwar gesehen, aber ohne genugsame Betrachtung vermeinet, dass weil OR in situ proximo in Or verwandelt würde, auch $RS = dq$ das differentiale von OR wäre, folglich $CM + MO$ eine constans und die ganze curva eine ellipsis seyn müsste; nach dem von Ew. gegebenen éclaircissement aber ist es deutlich, dass Oo das diff. von $CM + MO$ sey, und dahero RO in situ proximo ro werde, so dass, wenn $RO = w$, $ro = w - dq + Oo$ seyn muss. Es ergibt sich auch aus dieser Figur, dass wenn CR ein maximum ist, die puncta O und R in axe zusammenkommen, und so oft dieses geschiehet $CM = CN$ seyn müsse.

Die summa seriei

$$\frac{1}{t} + \frac{u}{t(t+a)} + \frac{u(u+a)}{t(t+a)(t+b)} + \frac{u(u+a)(u+b)}{t(t+a)(t+b)(t+c)} + \text{etc.} = A$$

lässt sich folgendergestalt finden: Sit $b = c = d = \text{etc.} = 0$ erit ipsa series A

$$= \frac{1}{t} + \frac{u}{t(t+a)} + \frac{u(u+a)}{t(t+a)}\left(\frac{1}{t} + \frac{u}{tt} + \frac{uu}{t^3} + \frac{u^3}{t^4} + \text{etc.}\right)$$

hoc est, ob $\frac{1}{t}+\frac{u}{tt}+\frac{uu}{t^3}+\frac{u^3}{t^4}+\text{etc.}=\frac{1}{t-u}$, erit

$$A=\frac{1}{t}+\frac{u}{t(t+a)}+\frac{u(u+a)}{t(t+a)(t-u)}=\frac{1}{t-u}.$$

Sit $c=d=e=\text{etc.}=0$, erit ipsa series

$$A=\frac{1}{t}+\frac{u}{t(t+a)}+\frac{u(u+a)}{t(t+a)(t+b)}$$
$$+\frac{u(u+a)(u+b)}{t(t+a)(t+b)}\left(\frac{1}{t}+\frac{u}{tt}+\frac{uu}{t^3}+\frac{u^3}{t^4}+\text{etc.}\right),$$

seu

$$A=\frac{1}{t}+\frac{u}{t(t+a)}+\frac{u(u+a)}{t(t+a)(t+b)}+\frac{u(u+a)(u+b)}{t(t+a)(t+b)(t-u)}=\frac{1}{t-u}.$$

Eben diese Eigenschaft haben c, d, e et alii *lusus naturae*, wenn sie so weit als man will reales, alle übrige aber $=0$ gesetzt werden.

Goldbach.

LETTRE C.

=

Euler à Goldbach.

Sommaire. Mémoire sur les perturbations de Saturne et de Jupiter. Théorie de la Lune. Réponse à la lettre précédente.

Berlin d. 20 September 1746.

— — — Für die mir gütigst überschickten Devisen zu meiner künftigen pièce über die Verwirrungen der Bewegungen des ♄ und ♃ statte allen gehorsamsten Dank ab. Solche schicken sich vollkommen auf die Art meiner Abhandlung. Ich habe davon die mittlere erwählet, als welche mir mit meinem Vortrag auf das Genaueste übereinzukommen schien. Ich habe dabey jetzt alle Schwierigkeiten fast gänzlich überwunden, welche von einer ganz andern Art sind, als die, so ich bey dem Mond angetroffen; denn der Saturnus behält beinahe eben die Bewegung, als wenn er von der Sonne allein angezogen würde, und wird nur von dem Jupiter etwas wenig verwirrt, dahingegen die Bewegung des Monds