Wenn also gesetzt wird

$$a^X = \alpha a^A + \beta a^B + \gamma a^C + \delta a^D + \text{etc.}$$

so wird

$$\alpha = 1 - \frac{(x-1)}{1} + \frac{(x-1)(x-2)}{1.2} - \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3} + \text{etc.}$$
$$= (1-1)^{x-1},$$

wie aus der Evolution erhellt

$$\beta = \frac{(x-1)}{1} - \frac{2(x-1)(x-2)}{1.2} + \frac{3(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3} - \text{etc.}$$
$$= (x-1)\left(1 - \frac{(x-2)}{1} + \frac{(x-2)(x-3)}{1.2} - \text{etc.}\right)$$
$$= (x-1)(1-1)^{x-2},$$
$$\gamma = \frac{(x-1)(x-2)}{1.2}\left(1 - \frac{3(x-3)}{3} + \frac{6(x-3)(x-4)}{3.4} - \frac{10(x-3)(x-4)(x-5)}{3.4.5} + \text{etc.}\right)$$
$$= \frac{(x-1)(x-2)}{1.2}(1-1)^{x-3},$$
$$\delta = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3}(1-1)^{x-4} \text{ etc.}$$

Man darf also nur jetzt setzen $x = \frac{1}{2}$.

Ew. Demonstration, dass

$$\frac{1}{t} + \frac{u}{t(t+a)} + \frac{u(u+a)}{t(t+a)(t+b)} + \text{etc.} = \frac{1}{t-u}$$

ist meines Erachtens die einzige, wodurch dieser lusus naturae bewiesen werden kann. Inzwischen, wenn für a, b, c, etc. t und u determinirte Zahlen angenommen werden, so bekommt man öfters series, deren Summation man nicht vermuthen sollte.

Euler.

LETTRE CI.

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Sur la série des lettres précédentes.

St. Petersburg d. 25. October 1746.

Die Nachricht, so Ew. aus Petersburg bekommen, dass Ihre Kais. Majestät mich mit ansehnlichen Gütern in Liefland begnadiget, ist in so weit gegründet, dass Höchst Dieselben mir das Gut Wolmarshof, welches jährlich 1400 R° Arende trägt, ad dies vitae Allergnädigst geschenkt haben. Was aber die akademischen Angelegenheiten betrifft, so habe ich mich derselben schon seit A. 1742 gänzlich entschlagen.

In der serie $\frac{1}{t} + \frac{u}{t(t+a)} + \frac{u(u+a)}{t(t+a)(t+b)} + \text{etc.}$ finden sich zwey Eigenschaften: 1. dass man dadurch, data summa et datis quibuscunque terminis ab initio, die seriem, cujus summa data est, finden kann; 2. dass man von unzähligen seriebus demonstriren kann, dass ihre summae unendlich gross sind, welches ohne dieses adminiculum sehr schwer seyn würde, z. Ex. wenn ich singulos terminos seriei

$$\frac{1}{t} + \frac{u}{t(t+a)} + \frac{u(u+a)}{t(t+a)(t+b)} + \text{etc.}$$

aequales setze singulis terminis hujus:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \text{etc.} = \pi,$$

und alsdann alle quantitates a, b, c, etc. durch u et constantes determinire, so muss folgen, dass die series

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \text{etc.}$$

nur in dem einen casu unendlich gross werde, wenn

$$u = \frac{t\pi - 1}{\pi}.$$

Goldbach.

LETTRE CII.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Théorie du mouvement de la Lune. Tables du mouvement de Saturne. Suite sur la série précédente.

Berlin d. 29. November 1746.

— — — Ich hoffe nächstens allhier meine neue theoriam motus Lunae unter die Presse geben zu können, und glaube dieselbe so weit gebracht zu haben, dass man durch Hülfe meiner daraus verfertigten tabularum, den locum Lunae jederzeit so genau bestimmen kann, dass der Fehler niemals über 100 Secunden austrägt, da nach den Cassinianischen Tabellen der Fehler sich bisweilen auf 15′, nach den besten englischen aber auf 6′ belaufen kann.

Ich werde jetzt auch anfangen neue tabulas motus Saturni zu verfertigen, nachdem ich die perturbationem a Jove oriundam bestimmt. Dieses ist um so viel nöthiger, da M. le Monnier in seinem Werk: *Introduction dans l'Astronomie*