gross sind, welches ohne dieses adminiculum sehr schwer seyn würde, z. Ex. wenn ich singulos terminos seriei

$$\frac{1}{t} + \frac{u}{t(t+a)} + \frac{u(u+a)}{t(t+a)(t+b)} + \text{etc.}$$

aequales setze singulis terminis hujus:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \text{etc.} = \pi,$$

und alsdann alle quantitates a, b, c, etc. durch u et constantes determinire, so muss folgen, dass die series

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \text{etc.}$$

nur in dem einen casu unendlich gross werde, wenn

$$u = \frac{t\pi - 1}{\pi}.$$

Goldbach.

LETTRE CII.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Théorie du mouvement de la Lune. Tables du mouvement de Saturne. Suite sur la série précédente.

Berlin d. 29. November 1746.

— — — Ich hoffe nächstens allhier meine neue theoriam motus Lunae unter die Presse geben zu können, und glaube dieselbe so weit gebracht zu haben, dass man durch Hülfe meiner daraus verfertigten tabularum, den locum Lunae jederzeit so genau bestimmen kann, dass der Fehler niemals über 100 Secunden austrägt, da nach den Cassinianischen Tabellen der Fehler sich bisweilen auf 15′, nach den besten englischen aber auf 6′ belaufen kann.

Ich werde jetzt auch anfangen neue tabulas motus Saturni zu verfertigen, nachdem ich die perturbationem a Jove oriundam bestimmt. Dieses ist um so viel nöthiger, da M. le Monnier in seinem Werk: *Introduction dans l'Astronomie* bemerket, dass der locus ♄ computatus nach den besten Tabellen bisweilen um einen halben Grad a loco observato differire.

Dass man vermittelst der series

$$\frac{1}{t-u} = \frac{1}{t} + \frac{u}{t(t+a)} + \frac{u(u+a)}{t(t+a)(t+b)} + \text{etc.}$$

eine seriem angeben kann, deren summa data und termini quotvis ab initio gleichfalls dati sind, scheinet freylich dem ersten Anblick nach sehr merkwürdig zu seyn. Wenn man aber bedenket, dass die daher entstehende series nicht regulär seyn werde, so lässt sich eben dieses auf unendlich viel andere Manieren gleichfalls bewerkstelligen. Als, ich wollte eine seriem geben, deren Summ $= S$ und deren 6 erste termini seyn sollen $a + b + c + d + e + f$, so suche ich eine seriem quamcunque, deren Summ $= S$; solche sey $S = A + B + C + D + E +$ etc. Hernach wird seyn

$$S = \overset{1}{a} + \overset{2}{b} + \overset{3}{c} + \overset{4}{d} + \overset{5}{e} + \overset{6}{f} + (A \overset{7}{-} a) + (B \overset{8}{-} b) + (C \overset{9}{-} c)$$
$$+ (D \overset{10}{-} d) + (E \overset{11}{-} e) + (F \overset{12}{-} f) + \overset{13}{G} + \overset{14}{H} + \text{etc.}$$

Was die andere Eigenschaft der angeführten seriei betrifft, dass man aus derselben von unzählig viel seriebus beweisen kann, dass ihre Summ unendlich gross sey, scheint ebenfalls sehr merkwürdig zu seyn, allein bey der würklichen Application kommt man immer auf solche series, wo die Sach vor sich selbst klar vor Augen liegt. Denn wenn die series $\frac{1}{t-u} = \frac{1}{t} + \frac{u}{t(t+a)} + \frac{u(u+a)}{t(t+a)(t+b)} +$ etc. wahr ist, so muss der terminus infinitesimus $\frac{u(u+a)(u+b)(u+c)\text{ etc.}}{t(t+a)(t+b)(t+c)\text{ etc.}} = 0$ seyn, welches geschiehet, wenn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \text{etc.} = \infty$. Vergleicht man nun diese seriem mit einer vorgelegten serie $S = A + B + C + D + E + F +$ etc., so wird $t = \frac{1}{A}$,

$u = \frac{S-A}{AS}$ und ferner $a = \frac{1}{B} - \frac{1}{A} - \frac{A}{BS}$, $b = \frac{1}{C} - \frac{1}{A} - \frac{(A+B)}{CS}$, $c = \frac{1}{D} - \frac{1}{A} - \frac{(A+B+C)}{DS}$ etc., folglich wird $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \text{etc.} =$

$$\frac{ABS}{A(S-A)-BS} + \frac{ACS}{A(S-A-B)-CS} + \frac{ADS}{A(S-A-B-C)-DS} +$$
$$\frac{AES}{A(S-A-B-C-D)-ES} + \text{etc.}$$

Wenn nun die summa seriei vera ist, so ist

$$S - A - B - C - D - \text{etc.} = 0$$

und werden folglich hier alle termini infinitesimi $=$

$$\frac{AZS}{A.0 - ZS} = -A,$$

folglich alle finitae magnitudinis. Dieses erhellet noch deutlicher aus der Form $\frac{u(u+a)(u+b)(u+c)\text{ etc.}}{t(t+a)(t+b)(t+c)\text{ etc.}}$, welche bey dieser Application wird

$$\frac{S-A}{S} \cdot \frac{S-A-B}{S-A} \cdot \frac{S-A-B-C}{S-A-B} \cdot \frac{S-A-B-C-D}{S-A-B-C} \text{ etc.}$$

und folglich wird der Werth, continuatione in infinitum instituta $= \frac{S-A-B-C-D-E-\text{etc.}}{S}$, welcher augenscheinlich, im Fall die Summ wahr ist, gleich 0 wird.

Es ist ein Mathematicus in Ostfriesland Namens Jacobus Adami, welcher mich neulich um die interpolationem hujus seriei gefraget

$$x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \text{etc.} = s,$$

welche series die tangentem arcui x respondentem exprimirt und entstehet ex conversione hujus seriei

$$x = s - \frac{1}{3}s^3 + \frac{1}{5}s^5 - \frac{1}{7}s^7 + \frac{1}{9}s^9 - \text{etc.}$$

Ich habe ihm darauf geantwortet, dass der terminus medius inter primum x et secundum $\frac{1}{3}x^3$ sey

$$\frac{16}{\pi^3}x^2\left(1+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}+\text{etc.}\right)$$

Hernach ist der terminus medius inter secundum $\frac{1}{3}x^3$ et tertium $\frac{2}{15}x^5 =$

$$\frac{64}{\pi^5}x^4\left(1+\frac{1}{3^5}+\frac{1}{5^5}+\frac{1}{7^5}+\frac{1}{9^5}+\text{etc.}\right)$$

Ferner ist der terminus medius inter tertium $\frac{2}{15}x^5$ et quartum $\frac{17}{315}x^7 = \frac{256}{\pi^7}x^6\left(1+\frac{1}{3^7}+\frac{1}{5^7}+\frac{1}{7^7}+\frac{1}{9^7}+\text{etc.}\right)$.

Euler.

LETTRE CIII.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Loi d'après laquelle procèdent les sommes des diviseurs des nombres naturels.

Berlin d. 1. April 1747.

— — Letztens habe ich eine sehr wunderbare Ordnung in den Zahlen, welche die summas divisorum der numerorum naturalium darstellen, entdecket, welche mir um so viel merkwürdiger vorkam, da hierin eine grosse Verknüpfung mit der Ordnung der numerorum primorum zu stecken scheint. Daher bitte Ew. diesen Einfall einiger Aufmerksamkeit zu würdigen.

Wenn n einen numerum quemcunque integrum affirmativum bedeutet, so soll $\int n$ die summam omnium divisorum hujus numeri n anzeigen. Also wird seyn